

# 线性双时间尺度系统的事件驱动 $H_\infty$ 控制研究

张艳<sup>1</sup>, 杨忠<sup>1</sup>, 段文勇<sup>2</sup>

(1. 金陵科技学院智能科学与控制工程学院, 江苏 南京 211169; 2. 盐城工学院电子工程学院, 江苏 盐城 224051)

**摘要:** 针对线性双时间尺度系统提出了一种创新的事件驱动组合  $H_\infty$  控制策略。首先, 通过双重速率采样技术对原始双时间尺度系统进行采样, 并将系统分解为快、慢子系统。其次, 分别对快、慢子系统设计事件驱动原则, 以实现对不同时间尺度数据的异步传输, 从而降低传输频率, 减小网络负载。再次, 基于李雅普诺夫理论提出了分别保障快、慢子系统是  $H_\infty$  鲁棒稳定的线性矩阵不等式条件, 证明了对应的事件驱动原则和线性矩阵不等式条件下两个子系统是鲁棒稳定的, 构建了基于两个  $H_\infty$  子控制器的组合控制器。最后, 通过数值仿真验证了该控制策略的有效性。

**关键词:** 双时间尺度; 事件驱动;  $H_\infty$  控制; 组合控制; 李雅普诺夫理论

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-755X(2021)04-0047-08

## Research on Event-triggered $H_\infty$ Control of Linear Two Time Scale Systems

ZHANG Yan<sup>1</sup>, YANG Zhong<sup>1</sup>, DUAN Wen-yong<sup>2</sup>

(1. Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China; 2. Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

**Abstract:** In this paper a novel event-triggered  $H_\infty$  composite control strategy is proposed for linear two time scale systems. Firstly, the original system is sampled using (fast and slow) two different sampling rates and decoupled into fast and slow subsystems. Secondly, two event-triggered mechanisms are designed separately for slow and fast subsystems, thereby reducing the transmission frequency and reducing the network burden. Thirdly, based on the Lyapunov theory, conditions are proposed in linear matrix inequalities form to guarantee the sub-systems' robust stabilities. It is proved that the two sub-systems are robust stable under corresponding event-triggered communications and linear matrix inequalities conditions. A  $H_\infty$  controller composed of two sub-controllers is developed. In the end, a numerical example is simulated to verify the effectiveness of the theoretical results.

**Key words:** two time scale system; event-triggered;  $H_\infty$  control; composite control; Lyapunov theory

很多工程系统具有双时间尺度特性, 例如电力系统<sup>[1-2]</sup>、高超音速飞行器<sup>[3]</sup>等。双时间尺度问题会导致控制过程中的刚性问题。奇异摄动模型可以恰当地描述此类系统的双时间尺度动态行为。该模型可以对系统进行快、慢分解以获得降阶的快、慢子系统, 并基于子系统设计快、慢子控制器, 将快、慢子控制器组合起来获得组合控制器。该方法具有有效降维、减小设计复杂度、缓解刚性问题的优势, 使得奇异摄动理

**收稿日期:** 2021-11-05

**基金项目:** 江苏省高等学校基础科学(自然科学)研究面上项目(21KJB120003); 金陵科技学院校极孵化基金项目(jit-fhxm-201906); 江苏省产学研合作项目(BY2020649, BY2021358)

**作者简介:** 张艳(1987—), 女, 河北沧州人, 讲师, 博士, 主要从事智能控制、双时间尺度系统研究。

论吸引了众多学者的兴趣<sup>[4-8]</sup>,获得了充分的发展。

另一方面,随着网络技术的发展,网络控制领域出现大量的研究成果。不同于传统的时间驱动策略,1999 年文献[9]提出了事件驱动网络传输策略。在事件驱动控制理论中,当事件驱动机制(event-triggered mechanism,ETM)满足时,状态信息或控制数据被传输一次。设计驱动条件,可以减少网络传输频率,选择性地优化传输时刻,减少网络负载<sup>[10-11]</sup>。

本文探索了双时间尺度系统的网络控制问题。鉴于此类系统的状态具有时间尺度差异,本文采用多重速率采样技术,并分别对快、慢状态设计 ETM,如图 1 所示,从而实现不同时间尺度数据的异步传输。此外,基于快、慢子系统分别设计了  $H_\infty$  控制器,当慢状态  $x(k_s)$  与慢状态理想轨迹  $x_d(k_s)$  的误差  $e_x(k_s)$  或者快状态  $z(k_f)$  与快状态理想轨迹  $z_d(k_f)$  的误差  $e_z(k_f)$  超过 ETM 上界而传输数据时,该状态对应的  $H_\infty$  子控制器也会相应更新,那么组合控制器同时更新数据。

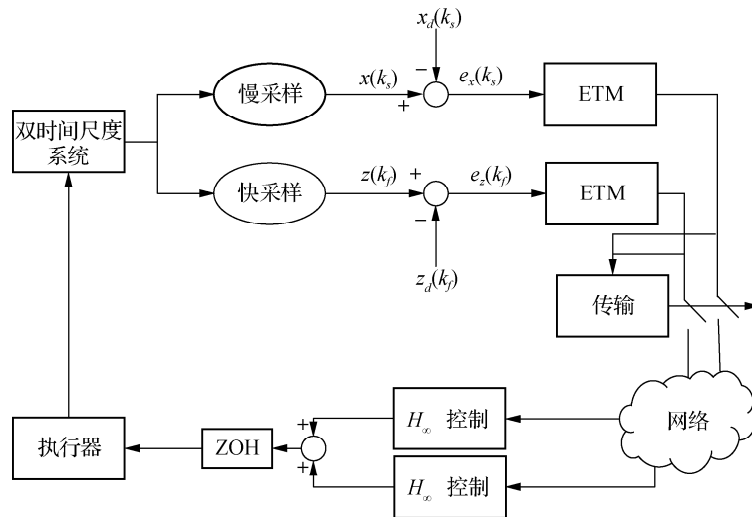


图 1 事件驱动控制策略

文献[12]针对线性奇异摄动系统设计了基于模型的事件驱动控制方法,该控制方法可以保证慢子系统是渐进稳定的,但不能保障快子系统是渐进稳定的。文献[13]假设快子系统是渐进稳定的,基于降阶的慢动态模型设计了事件驱动控制策略。文献[14-15]考虑离散奇异摄动系统的事件驱动控制问题,但是快、慢状态被同一个 ETM 驱动,即不同时间尺度的数据同步传输。本文在外界干扰和网络传输时滞的情况下,对快、慢状态分别设计了 ETM,实现不同时间尺度的数据异步传输,以降低整体的传输次数和网络负载,利用李雅普诺夫稳定性理论,设计组合事件驱动  $H_\infty$  控制器。

## 1 线性双时间尺度系统描述和解耦

考虑如下线性双时间尺度系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t) \quad (1a)$$

$$\epsilon\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (1b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$$

其中  $0 < \epsilon \ll 1$  为奇异摄动参数,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^m$  分别为慢、快状态向量,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$  为输入向量。

假设矩阵  $\mathbf{A}_{22}$  是可逆的,则式(1)可以解耦为降阶的快、慢子模型<sup>[6]</sup>。令  $\epsilon = 0$ ,由式(1)推导可得:

$$\mathbf{z}_s(t) = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_s(t) - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{u}_s(t) \quad (2)$$

将  $\mathbf{z}_s(t)$  代入式(1),可以获得慢子系统模型:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_s(t) \quad (3)$$

其中  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{B}_s = -\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{x}_s(t)$ 、 $\mathbf{z}_s(t)$  和  $\mathbf{u}_s(t)$  分别为原始高阶系统式(1)中状态

向量  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{z}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  的慢分量。

定义  $\mathbf{z}_f(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_s(t)$ , 然后变换时间尺度为  $\tau = \frac{t-t_0}{\epsilon}$ , 可以获得快子系统模型:

$$\dot{\mathbf{z}}_f(\tau) = \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}_f(\tau) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_f(\tau) \quad (4)$$

其中  $\mathbf{u}_f(\tau) = \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_s(\tau)$  为输入变量的快分量。

在原始高阶系统式(1)中,慢动态是  $\mathbf{x}(t)$  变量的主要分量,文献[6]用数学方法严格证明了  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{x}_s(t)$  之间的误差为  $O(\epsilon)$ 。 $\mathbf{x}(t)$  变量中的快动态是相对微小、可忽略的,因此,分解过程中忽略了  $\mathbf{x}(t)$  变量中的快动态。通过分解,原始高阶系统被分解为快、慢子系统,模型阶数明显降低了。

接着,针对快、慢子模型分别设计快子控制器  $\mathbf{u}_f(\tau) = \mathbf{K}_f\mathbf{z}_f(\tau)$  和慢子控制器  $\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{K}_s\mathbf{x}_s(t)$ 。作用于原始高阶系统的组合控制器为:

$$\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{u}_f(\tau) \quad (5)$$

备注 1: 本文将对快、慢状态分别设计事件驱动原则,那么快、慢状态更新时刻是不同的,对应的快、慢控制输入更新时刻也不同。所以,对于慢控制输入本文使用时间符号  $t$ ,对于快控制输入本文使用时间符号  $\tau$ 。当快或慢控制输入更新时,组合控制输入相应更新,组合控制器的时间符号为  $\theta$ 。

备注 2: 由以上解耦系统可见,奇异摄动方法可以有效地降低模型阶数。此外,文献[6]指出如果慢子系统在控制输入  $\mathbf{u}_s(t)$  作用下是稳定的,快子系统在控制输入  $\mathbf{u}_f(\tau)$  作用下是稳定的,那么一定存在  $\epsilon^* > 0$  使得对于任意的  $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ , 在组合控制输入  $\mathbf{u}(\theta)$  作用下,原始高阶闭环系统是渐进稳定的。该理论奠定了奇异摄动理论的基础。

备注 3: 在事件驱动控制理论中,如果在  $t_k$  时刻 ETM 条件被触发,则数据在  $t_k$  时刻被传输,同时控制输入信号更新。此时,最新一次传输的状态  $\mathbf{x}(t_k)$  与实时状态  $\mathbf{x}(t)$  之间的误差  $\mathbf{e} = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t)$  减小为 0。但是在传输时刻间隔内,也就是当  $t \in (t_k, t_{k+1})$  时,误差  $\mathbf{e}$  开始增长,而零阶保持器保持控制输入信号不变,直到下次 ETM 被触发。考虑到传输间隔之内的误差  $\mathbf{e}$  和网络传输产生的时滞,本文设计鲁棒  $H_\infty$  控制策略。

## 2 事件驱动原则设计

本节对快、慢子系统分别设计事件驱动原则和  $H_\infty$  控制器,利用李雅普诺夫理论证明在事件驱动方式下,子系统是鲁棒稳定的,分析了组合控制器的控制效果,并以慢子系统模型式(3)为例,详细阐述本控制策略的设计过程。

### 2.1 慢子系统控制器设计

考虑外界干扰和系统输出,慢子系统的模型描述如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_s(t) + \mathbf{C}_s\omega(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{D}_s\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{F}_s\mathbf{u}_s(t) \quad (7)$$

设计慢子系统的 ETM 如下:

$$\min_l \{lh \mid \mathbf{e}^T(i_k h) \Phi_s \mathbf{e}(i_k h) \geq \delta_1 \mathbf{x}^T(t_k h) \Phi_s \mathbf{x}(t_k h)\} \quad (8)$$

其中  $h > 0$  为慢子系统的采样周期,  $t_k h$  为采样时刻,  $i_k h$  为传输时刻, 且  $i_k h = t_k h + lh$ ,  $\delta_1 \geq 0$  为已知参数,  $\Phi_s$  是需要设计的正定矩阵,  $\mathbf{e}(i_k h)$  为当前采样的慢状态和最后一次传输状态之间的误差, 即

$$\mathbf{e}(i_k h) = \mathbf{x}_s(i_k h) - \mathbf{x}_s(t_k h) \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{K}_s\mathbf{x}_s(t_k h) = \mathbf{K}_s(\mathbf{x}_s(i_k h) - \mathbf{e}(i_k h)), t \in [t_k h + \eta(t_k h), t_{k+1} h + \eta(t_{k+1} h)] \quad (10)$$

其中,  $\eta(t_k h)$  为  $t_k h$  时刻数据包传输时滞, 定义上一次网络传输时刻  $i_k h$  之后的传输间隔内的传输时滞如下:

$$\eta(t) \triangleq t - i_k h, \eta(t) \in [\eta_1, \eta_3]$$

其中  $\eta_1$  和  $\eta_3$  为传输时滞的上界和下界。具体的慢采样和数据传输过程如图 2 所示:

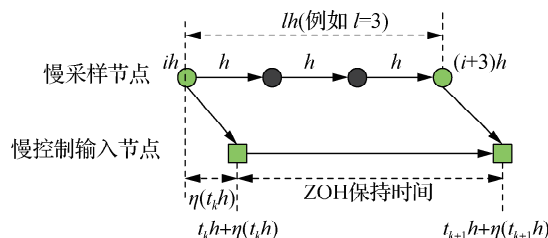


图 2 慢采样及其数据传输过程示意

备注 4: 由事件驱动原则式(8)和图 2 可知, 事件驱动控制方法不同于时间驱动控制方法。时间驱动控制方法是设计者确定的时间间隔长度, 在某些固定时刻传输控制信号; 事件驱动控制方法是根据误差的大小与系统状态变量的关系确定是否传输数据, 即当误差足够大时, 控制信号才被传输。那么事件驱动控制方法可以有效地降低网络传输负载。此外, 结合 Lyapunov 理论, 可以证明合理的事件驱动原则足以保障系统的稳定性。

那么慢控制输入为:

$$u_s(t) = K_s[x_s(t - \eta(t)) - e(i_k h)] \quad (11)$$

将  $u_s(t)$  代入式(6)、(7) 可得:

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s K_s[x_s(t - \eta(t)) - e(i_k h)] + C_s \omega(t) \quad (12)$$

$$y_s(t) = D_s x_s(t) + F_s K_s[x_s(t - \eta(t)) - e(i_k h)] \quad (13)$$

现展示慢子系统的事件驱动鲁棒控制主要结论如下:

**定理 1** 对于给定的参数  $\eta_1 > 0, \eta_3 > 0, \gamma > 0, \delta_1 > 0$  以及适维矩阵  $K_s$ , 在事件驱动原则式(8)下,

如果存在实数矩阵  $P > 0, \Phi_s > 0, S > 0, R_i > 0, i = 1, 2, 3, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & * \\ Q_3 & Q_2 \end{bmatrix} > 0$ , 使得  $\Psi < 0$ , 那么式(12)、(13) 是内部稳定的且满足性能指标  $\|T_{y,w}\|_\infty < \gamma$ , 其中:

$$\begin{aligned} \Psi = & [(1,1) = \Psi_{11} + \delta_1 \Psi_{33}, (1,2) = \Psi_{12}, (1,3) = \Psi_{13}, (1,4) = \Psi_{14}, (2,2) = \Psi_{22}, (2,3) = \Psi_{23}, \\ & (2,7) = \Psi_{27}, (3,7) = \Psi_{37}, (4,4) = \Psi_{44}, (4,5) = \Psi_{45}, (5,5) = \Psi_{55}, (5,6) = \Psi_{56}, (6,6) = \Psi_{66}, \\ & (7,7) = \Psi_{77}], \end{aligned}$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_1 + \eta_3}{2},$$

$$\Psi_{11} = A_s^T P + P A_s + S - \eta_1 R_1 + D_s^T D_s + \eta_1^2 A_s^T R_1 A_s + (\eta_2 - \eta_1)^2 A_s^T R_2 A_s + (\eta_3 - \eta_2)^2 A_s^T R_3 A_s,$$

$$\Psi_{12} = P B_s K_s + D_s^T F K_s + \eta_1^2 A_s^T R_1 B_s K_s + (\eta_2 - \eta_1)^2 A_s^T R_2 B_s K_s + (\eta_3 - \eta_2)^2 A_s^T R_3 B_s K_s,$$

$$\Psi_{13} = -\Psi_{12}, \Psi_{14} = \eta_1 R_1,$$

$$\Psi_{22} = K^T F_s^T F_s K_s + \eta_1^2 K_s^T B_s^T R_1 B_s K_s + (\eta_2 - \eta_1)^2 K_s^T B_s^T R_2 B_s K_s + (\eta_3 - \eta_2)^2 K_s^T B_s^T R_3 B_s K_s,$$

$$\Psi_{23} = -K_s^T F_s^T F_s K_s - \eta_1^2 K_s^T B_s^T R_1 B_s K_s - (\eta_2 - \eta_1)^2 K_s^T B_s^T R_2 B_s K_s - (\eta_3 - \eta_2)^2 K_s^T B_s^T R_3 B_s K_s,$$

$$\Psi_{27} = \eta_1^2 K_s^T B_s^T R_1 C_s + (\eta_2 - \eta_1)^2 K_s^T B_s^T R_2 C_s + (\eta_3 - \eta_2)^2 K_s^T B_s^T R_3 C_s,$$

$$\Psi_{33} = \Phi_s, \Psi_{37} = -\Psi_{27}, \Psi_{44} = Q_1 - \eta_1 R_1 - S + (\eta_3 - \eta_2)^2 R_2, \Psi_{45} = (\eta_3 - \eta_2) R_2 + Q_3^T,$$

$$\Psi_{55} = Q_2 - (\eta_2 - \eta_1) R_2 - Q_1 - (\eta_3 - \eta_2) R_3, \Psi_{56} = (\eta_3 - \eta_2) R_3 - Q_3^T,$$

$$\Psi_{66} = -(\eta_3 - \eta_2) R_3 - Q_2, \Psi_{77} = \eta_1^2 C_s^T R_1 C_s + (\eta_2 - \eta_1)^2 C_s^T R_2 C_s + (\eta_3 - \eta_2)^2 C_s^T R_3 C_s - \gamma^2 I_n$$

证明: 定义李雅普诺夫函数  $V(t) \triangleq V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)$ , 其中:

$$V_1(t) = x_s^T(t) P x_s(t), \quad V_2(t) = \int_{t-\eta_1}^t x_s^T(v) S x_s(v) dv,$$

$$V_3(t) = \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \eta_{i-1}) \int_{-\eta_i}^{-\eta_{i-1}} \int_{t+s}^t x_s^T(v) R_i x_s(v) dv ds,$$

$$V_4(t) = \int_{t-\rho}^t \xi^T(v) Q \xi(v) dv, \quad \xi(v) = \begin{bmatrix} x(v - \eta_1) \\ x(v - \eta_2) \end{bmatrix}, \quad \rho = \frac{\eta_3 - \eta_1}{2}, \quad \eta_0 = 0$$

沿着式(12)、(13) 轨迹对  $V_1(t), V_2(t), V_3(t)$  和  $V_4(t)$  关于时间  $t$  求导可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= \dot{\mathbf{x}}_s^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_s(t) \\ &= \{\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}_s \mathbf{K}_s [\mathbf{x}_s(t - \eta(t)) - \mathbf{e}(i_k h)] + \mathbf{C}_s \omega(t)\}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \{\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{B}_s \mathbf{K}_s [\mathbf{x}_s(t - \eta(t)) - \mathbf{e}(i_k h)] + \mathbf{C}_s \omega(t)\} \\ &= \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{A}_s^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s(t) + \{\mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \mathbf{K}_s^T \mathbf{B}_s^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_s \mathbf{K}_s \mathbf{x}_s(t - \eta(t))\} - \\ &\quad \{\mathbf{e}^T(i_k h) \mathbf{K}_s^T \mathbf{B}_s^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_s \mathbf{K}_s \mathbf{e}(i_k h)\} + \omega(t) \mathbf{C}_s^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{P} \mathbf{C}_s \omega(t)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\dot{V}_2(t) = \mathbf{x}_s^T(t) \mathbf{S} \mathbf{x}_s(t) - \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \mathbf{S} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) &= \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \eta_{i-1})^2 \dot{\mathbf{x}}_s^T(t) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}_s(t) - \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \eta_{i-1}) \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \dot{\mathbf{x}}_s^T(v) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}_s(v) dv \\ &\leq \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \eta_{i-1})^2 \dot{\mathbf{x}}_s^T(t) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}_s(t) - \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \eta_{i-1}) \{\mathbf{x}_s^T(t - \eta_{i-1}) - \mathbf{x}_s^T(t - \eta_i)\} \mathbf{R}_i \{\mathbf{x}_s(t - \eta_{i-1}) - \mathbf{x}_s(t - \eta_i)\}\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(t) &= \dot{\boldsymbol{\xi}}^T(t) \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}^T(t - \rho) \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi}(t - \rho) \\ &= \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \mathbf{Q}_3^T \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_s(t - \eta_2) - \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_s(t - \eta_2) - \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \mathbf{Q}_3^T \mathbf{x}_s(t - \eta_3) - \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \mathbf{Q}_3 \mathbf{x}_s(t - \eta_2) - \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_s(t - \eta_3)\end{aligned}\quad (17)$$

当  $\omega(t) = 0$  的时候,由式(14) ~ (17) 可以推导获得  $\dot{V}(t)$  的不等式:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{11} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{12} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{12}^T \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}) \mathbf{e}(i_k h) + \\ &\quad \mathbf{e}^T(i_k h) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}^T) \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{14} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{14}^T \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{22} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{23} \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Psi}_{23}^T \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Psi}_{33} \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{44} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{45} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{45}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{55} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{56} \mathbf{x}_s(t - \eta_3) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{56}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{66} \mathbf{x}_s(t - \eta_3)\end{aligned}\quad (18)$$

根据事件驱动原则式(8),对于  $i_k h \in [t_k h, t_{k+1} h)$ ,可得  $\mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Phi}_s \mathbf{e}(i_k h) \leq \delta_1 \mathbf{x}_s^T(t_k h) \boldsymbol{\Phi}_s \mathbf{x}_s(t_k h)$ ,又根据  $\boldsymbol{\Psi}_{33}$  的定义可知  $\boldsymbol{\Psi}_{33} > 0$ ,那么式(18) 可以推导得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \mathbf{x}_s^T(t) (\boldsymbol{\Psi}_{11} + \delta_1 \boldsymbol{\Psi}_{33}) \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{12} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{12}^T \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}) \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{e}^T(i_k h) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}^T) \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{14} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{14}^T \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{22} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{23} \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Psi}_{23}^T \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{44} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{45} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{45}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{55} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{56} \mathbf{x}_s(t - \eta_3) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{56}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{66} \mathbf{x}_s(t - \eta_3)\end{aligned}\quad (19)$$

定义向量  $\boldsymbol{\zeta}_0^T = [\mathbf{x}_s^T(t), \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)), \mathbf{e}^T(i_k h), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3)]$ ,则式(19) 可变形为:

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\zeta}_0^T \boldsymbol{\Psi}_0 \boldsymbol{\zeta}_0 \quad (20)$$

其中  $\boldsymbol{\Psi}_0 = [(1,1) = \boldsymbol{\Psi}_{11} + \delta_1 \boldsymbol{\Psi}_{33}, (1,2) = \boldsymbol{\Psi}_{12}, (1,3) = \boldsymbol{\Psi}_{13}, (1,4) = \boldsymbol{\Psi}_{14}, (2,2) = \boldsymbol{\Psi}_{22}, (2,3) = \boldsymbol{\Psi}_{23},$   
 $(4,4) = \boldsymbol{\Psi}_{44}, (4,5) = \boldsymbol{\Psi}_{45}, (5,5) = \boldsymbol{\Psi}_{55}, (5,6) = \boldsymbol{\Psi}_{56}, (6,6) = \boldsymbol{\Psi}_{66}]$ 。

联合条件(13) 可以得到  $\dot{V}(t) < 0$ ,因此当  $\omega(t) = 0$  时,式(12)、(13) 是稳定的。

假设  $\omega(t) \neq 0$ ,类似前半部分的证明过程,容易得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \mathbf{x}_s^T(t) (\boldsymbol{\Psi}_{11} + \delta_1 \boldsymbol{\Psi}_{33}) \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{12} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{12}^T \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}) \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{e}^T(i_k h) (-\boldsymbol{\Psi}_{12}^T) \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_s^T(t) \boldsymbol{\Psi}_{14} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{14}^T \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{22} \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{23} \mathbf{e}(i_k h) + \mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Psi}_{23}^T \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)) \boldsymbol{\Psi}_{27} \omega(t) + \omega(t) \boldsymbol{\Psi}_{27}^T \mathbf{x}_s(t - \eta(t)) + \mathbf{e}^T(i_k h) \boldsymbol{\Psi}_{37} \omega(t) + \omega(t) \boldsymbol{\Psi}_{37}^T \mathbf{e}(i_k h) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{44} \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1) \boldsymbol{\Psi}_{45} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{45}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_1) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{55} \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2) \boldsymbol{\Psi}_{56} \mathbf{x}_s(t - \eta_3) + \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{56}^T \mathbf{x}_s(t - \eta_2) + \\ &\quad \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3) \boldsymbol{\Psi}_{66} \mathbf{x}_s(t - \eta_3) + \omega(t) \boldsymbol{\Psi}_{77} \omega(t) - \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) + \gamma^2 \omega^2(t)\end{aligned}\quad (21)$$

定义向量  $\zeta^T = [\mathbf{x}_s^T(t), \mathbf{x}_s^T(t - \eta(t)), \mathbf{e}^T(i_k h), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_1), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_2), \mathbf{x}_s^T(t - \eta_3), \omega(t)]$ , 则式(21) 可以变形为:

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T \Psi \zeta - \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) + \gamma^2 \omega^2(t) \quad (22)$$

根据定理条件  $\Psi < 0$  可以知道系统是内部稳定的, 且在零初始值条件下满足  $\|T_{y,w}\|_{\infty} < \gamma$ .

## 2.2 快子系统控制器设计

类似地, 假设快子系统的采样周期为  $\hat{h} = \varepsilon h$ ,  $j\hat{h}$  为采样时刻,  $t_j\hat{h}$  为传输时刻,  $\hat{\eta}(t_j\hat{h})$  为传输时滞, 假设传输时滞有界  $\hat{\eta}(t_j\hat{h}) \in [\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3]$ ,  $0 < \hat{\eta} < \hat{\eta}_3$ , 快状态的采样和传输过程如图 3 所示。

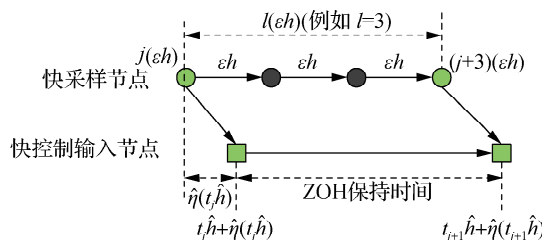


图 3 快采样及其数据传输过程示意

快子系统的事件驱动原则设计如下:

$$\min_l \{ \hat{h} \mid \hat{\mathbf{e}}^T(i_k \hat{h}) \Phi_f \hat{\mathbf{e}}(i_k \hat{h}) \geq \delta_2 \mathbf{z}_f^T(t_k \hat{h}) \Phi_f \mathbf{z}_f(t_k \hat{h}) \} \quad (23)$$

其中  $\delta_2 \geq 0$  是给定参数,  $\Phi_f$  是有待设计的正定矩阵,  $\hat{\mathbf{e}}(i_k \hat{h}) = \mathbf{z}_f(i_k \hat{h}) - \mathbf{z}_f(t_k \hat{h})$  为最新采样快状态与最后一次传输的快状态之间的误差。定义快控制输入为:

$$\mathbf{u}_f(t) = \mathbf{K}_f \mathbf{z}_f(t_k \hat{h}), \quad t \in [t_k \hat{h} + \hat{\eta}(t_k \hat{h}), t_{k+1} \hat{h} + \hat{\eta}(t_{k+1} \hat{h})] \quad (24)$$

类似慢子系统的推导过程, 将  $\mathbf{u}_f(t)$  代入快子系统可得:

$$\dot{\mathbf{z}}_f(t) = \mathbf{A}_{22} \mathbf{z}_f(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f [\mathbf{z}_f(t - \hat{\eta}(t)) - \hat{\mathbf{e}}(i_k \hat{h})] + \mathbf{C}_f \omega(t) \quad (25)$$

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{D}_f \mathbf{z}_f(t) + \mathbf{F}_f \mathbf{K}_f [\mathbf{z}_f(t - \hat{\eta}(t)) - \hat{\mathbf{e}}(i_k \hat{h})] \quad (26)$$

**定理 2** 对于给定参数  $\hat{\eta}_1 > 0, \hat{\eta}_3 > 0, \gamma > 0, \delta_2 > 0$  以及适维矩阵  $\mathbf{K}_f$ , 在事件驱动原则式(23) 下, 如果存在实数矩阵  $\hat{\mathbf{P}} > 0, \Phi_f > 0, \hat{\mathbf{S}} > 0, \hat{\mathbf{R}}_i > 0, i = 1, 2, 3, \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_1 & * \\ \hat{\mathbf{Q}}_3 & \hat{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} > 0$ , 使得  $\hat{\Psi} < 0$ , 那么式(25)、

(26) 是内部稳定的且满足性能指标  $\|T_{y,w}\|_{\infty} < \gamma$ , 其中:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} = & [(1,1) = \hat{\Psi}_{11} + \delta_1 \hat{\Psi}_{33}, (1,2) = \hat{\Psi}_{12}, (1,3) = \hat{\Psi}_{13}, (1,4) = \hat{\Psi}_{14}, (2,2) = \hat{\Psi}_{22}, (2,3) = \hat{\Psi}_{23}, \\ & (2,7) = \hat{\Psi}_{27}, (3,7) = \hat{\Psi}_{37}, (4,4) = \hat{\Psi}_{44}, (4,5) = \hat{\Psi}_{45}, (5,5) = \hat{\Psi}_{55}, (5,6) = \hat{\Psi}_{56}, (6,6) = \hat{\Psi}_{66}, \\ & (7,7) = \hat{\Psi}_{77}], \end{aligned}$$

$$\hat{\eta}_2 = \frac{\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_3}{2},$$

$$\hat{\Psi}_{11} = \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}_s + \hat{\mathbf{S}} - \hat{\eta}_1 \hat{\mathbf{R}}_1 + \hat{\mathbf{D}}_f^T \hat{\mathbf{D}}_f + \hat{\eta}_1^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{A}_{22} + (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{A}_{22} + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{A}_{22},$$

$$\hat{\Psi}_{12} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f + \mathbf{D}_f^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{K}_f + \hat{\eta}_1^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f + (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{A}_{22}^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f,$$

$$\hat{\Psi}_{13} = -\hat{\Psi}_{12}, \hat{\Psi}_{14} = \hat{\eta}_1 \hat{\mathbf{R}}_1,$$

$$\hat{\Psi}_{22} = \mathbf{K}_f^T \mathbf{F}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{K}_f + \hat{\eta}_1^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f + (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f,$$

$$\hat{\Psi}_{23} = -\mathbf{K}_f^T \mathbf{F}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{K}_f - \hat{\eta}_1^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f - (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f - (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{B}_f \mathbf{K}_f,$$

$$\hat{\Psi}_{27} = \hat{\eta}_1^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{C}_f + (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{C}_f + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{K}_f^T \mathbf{B}_f^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{C}_f,$$

$$\hat{\Psi}_{33} = \Phi_f, \hat{\Psi}_{37} = -\hat{\Psi}_{27}, \hat{\Psi}_{44} = \hat{\mathbf{Q}}_1 - \hat{\eta}_1 \hat{\mathbf{R}}_1 - \hat{\mathbf{S}} + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \hat{\mathbf{R}}_2, \hat{\Psi}_{45} = (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2) \hat{\mathbf{R}}_2 + \hat{\mathbf{Q}}_3^T,$$

$$\hat{\Psi}_{55} = \hat{\mathbf{Q}}_2 - (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1) \hat{\mathbf{R}}_2 - \hat{\mathbf{Q}}_1 - (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2) \hat{\mathbf{R}}_3, \hat{\Psi}_{56} = (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2) \hat{\mathbf{R}}_3 - \hat{\mathbf{Q}}_3^T, \hat{\Psi}_{66} = -(\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2) \hat{\mathbf{R}}_3 - \hat{\mathbf{Q}}_2,$$

$$\hat{\Psi}_{77} = \hat{\eta}_1^2 \mathbf{C}_f^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{C}_f + (\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1)^2 \mathbf{C}_f^T \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{C}_f + (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_2)^2 \mathbf{C}_f^T \hat{\mathbf{R}}_3 \mathbf{C}_f - \gamma^2 \mathbf{I}_n$$

备注 5: 根据文献[16], 利用不同的采样速率对快慢状态进行采样, 如果两个闭环的子系统都是渐进稳定的, 那么必然存在  $\varepsilon^* > 0$ , 使得对于任意的  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ , 原始系统在组合控制器式(5) 作用下是渐进稳

定的。由此可知,存在  $\epsilon^* > 0$ ,使得对于任意的  $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$  原始高阶系统在该事件驱动控制策略下是内部稳定的。

### 3 仿真实验

本节通过一个数值仿真算例验证本文控制策略的有效性。考虑如下四阶线性双时间尺度系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(t) \\ \epsilon \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -0.465 & -0.262 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\end{aligned}$$

设置系统参数  $\eta_1 = \hat{\eta}_1 = 0.01, \eta_3 = \hat{\eta}_3 = 1.5, \delta_1 = \delta_2 = 1$ , 性能指标  $\gamma = 0.5$ 。基于本文的方法,利用 MATLAB 计算定理 1 和定理 2 中的不等式可以获得如下计算结果:

$$\begin{aligned}P &= \begin{bmatrix} 126.9643 & -48.4817 \\ -48.4817 & 22.5128 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 71.3688 & -36.5025 \\ -36.5025 & 30.3486 \end{bmatrix}, \quad \Phi_s = \begin{bmatrix} 77.7868 & -35.8013 \\ -35.8013 & 38.0874 \end{bmatrix}, \\ R_1 &= \begin{bmatrix} 259.7194 & 224.7623 \\ 224.7623 & 353.9729 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 98.1589 & -20.7669 \\ -20.7669 & 28.0860 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 98.1589 & -20.7669 \\ -20.7669 & 28.0860 \end{bmatrix}, \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} -104.6504 & 0 \\ 0 & -104.6504 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = Q_1, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_s = [-9 \quad -8.6], \\ \hat{P} &= \begin{bmatrix} 50.1207 & -0.0251 \\ -0.0251 & 50.1207 \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} 16.6295 & 4.5956 \\ 4.5956 & 18.3992 \end{bmatrix}, \quad \Phi_f = \begin{bmatrix} 25.9298 & 2.2978 \\ 2.2978 & 26.8147 \end{bmatrix}, \\ \hat{R}_1 &= \begin{bmatrix} 37.0496 & -0.4709 \\ -0.4709 & 36.8712 \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_2 = \begin{bmatrix} 34.4085 & -0.2301 \\ -0.2301 & 34.4085 \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_3 = \begin{bmatrix} 34.4085 & -0.2301 \\ -0.2301 & 34.4085 \end{bmatrix}, \\ \hat{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -35.2302 & 0 \\ 0 & -35.2302 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = \hat{Q}_1, \quad \hat{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_f = [-0.18 \quad -0.05]\end{aligned}$$

根据定理 1 和定理 2 可知,系统是鲁棒稳定的。图 4 为系统状态响应图,与定理计算结果一致,验证了本文结论的正确性和有效性。此外,图 5 展示了该控制策略的触发时刻和触发时间间隔,可见快、慢状态是异步传输的,可以有效减少网络负载。

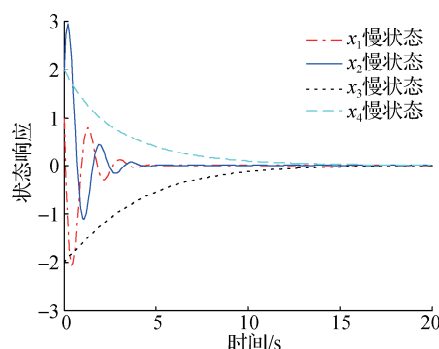


图 4 系统状态响应图

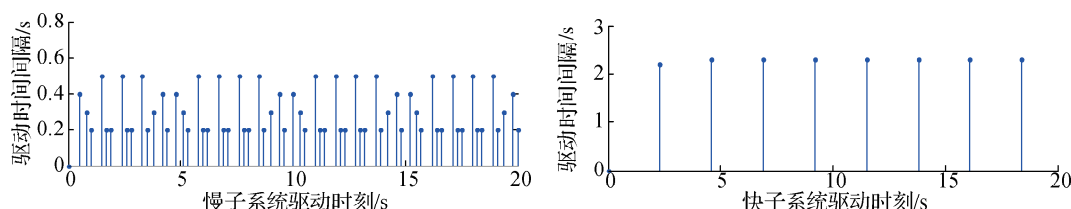


图 5 快、慢状态的事件触发间隔

## 4 结 语

本文对线性双时间尺度系统设计了鲁棒  $H_\infty$  控制策略。首先,利用不同的采样速率和奇异摄动解耦方法,推导获得离散的快、慢子系统。其次,为了处理时间尺度差异,对两个子系统分别设计了满足  $H_\infty$  指标的事件驱动控制策略,以此实现快、慢数据的异步传输,降低整体的传输次数和网络负载。以此为基础,本文设计了组合控制器,分析了组合控制器的控制效果。最后,采用四阶的奇异摄动模型数值算例验证了本文理论结果的有效性。该方法对风力发电系统、无人飞行器、刚性机器人等具有双时间尺度特性的实际工程系统具有较高的应用价值。

### 参考文献:

- [1] CHOQUE PILLCO E, ALBERTO L F C. On the foundations of stability analysis of power systems in time scales[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2015, 62(5): 1230 – 1239
- [2] ZHANG Y, LIU Z F, YANG Z, et al. Robust control of wind turbines by using singular perturbation method and linear parameter varying model[J]. Journal of Control Science and Engineering, 2016(3): 1 – 10
- [3] REN W J, JIANG B, YANG H. Singular perturbation-based fault-tolerant control of the air-breathing hypersonic vehicle [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2019, 24(6): 2562 – 2571
- [4] O'MALLEY R E Jr. Singular perturbation methods for ordinary differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1991
- [5] NAIDU D S, CALISE A J. Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: a survey [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(6): 1057 – 1078
- [6] KOKOTOVIC P, KHALIL H K, O'REILLY J. Singular perturbation methods in control: analysis and design[M]. Philadelphia: SIAM, 1999
- [7] DUAN W Y, LI Y, CHEN J, et al. New robust stability criteria for lur'e systems with time-varying delays and sector-bounded nonlinearities[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19(2): 596 – 606
- [8] CHEN W H, HE H H, LU X M. Multi-rate sampled-data composite control of linear singularly perturbed systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(4): 2028 – 2048
- [9] KARL-ERIK Å. A simple event-based PID controller[J]. IFAC Proceedings Volumes, 1999, 32(2): 8687 – 8692
- [10] HEEMELS W P M, GORTER R J A, ZIJL V A, et al. Asynchronous measurement and control: a case study on motor synchronization[J]. Control Engineering Practice, 1999, 7(12): 1467 – 1482
- [11] JOHAN Å K, BERNHARDSSON B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 1999, 32(2): 5006 – 5011
- [12] REN X, HAO F. Model-based dual-stage event-triggered control of linear system with two time scales[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(3): 424 – 439
- [13] ABDELRAHIM M, POSTOYAN R, DAAFOUZ J. Event-triggered control of nonlinear singularly perturbed systems based only on the slow dynamics[J]. Automatica, 2015, 52: 15 – 22
- [14] MA L, WANG Z D, CAI C X, et al. A dynamic event-triggered approach to  $H_\infty$  control for discrete-time singularly perturbed systems with time-delays and sensor saturations[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(11): 6614 – 6625
- [15] SONG J, NIU Y G. Dynamic event-triggered sliding mode control: dealing with slow sampling singularly perturbed systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(6): 1079 – 1083
- [16] LITKOUHI B, KHALIL H. Multirate and composite control of two-time-scale discrete-time systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, 30(7): 645 – 651

(责任编辑: 湛 江)