

基于离散泊松方程求解的相位解包算法

杨荣根

(金陵科技学院智能科学与控制工程学院, 江苏 南京 211169)

摘要:在光学测量中相移干涉是一种常用的测量光学镜片表面形貌的方法,但是相移干涉所提取的相位值受反正切函数的限制,被包裹在 $(-\pi, \pi)$ 范围内,要想得到绝对相位就必须对提取的相位进行准确解包。基于离散泊松方程求解的相位解包算法能精确解包相位,从最小二乘损失函数开始,通过离散余弦变换在频率域得到方程的精确解,再逆变换到空间域得到方程的最小二乘解。仿真实验和真实数据实验都表明:基于离散泊松方程求解的相位解包算法能够克服路径相关方法的不一致性,抑制噪声误差,恢复绝对相位。

关键词:相位解包;最小二乘;泊松方程;相移干涉

中图分类号:TP391.8

文献标识码:A

文章编号:1672-755X(2022)02-0039-06

Phase Unwrapping Algorithm Based on the Solution of Discrete Poisson Equation

YANG Rong-gen

(Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: In optical measurement, phase-shifting interferometry is a common method to measure the surface morphology of optical lens, but the phase value extracted by phase-shifting interferometry is limited by the arctangent function and is wrapped in the range of $(-\pi, \pi)$. In order to obtain the absolute phase, the extracted phase must be unpacked accurately. The phase unwrapping algorithm based on the solution of discrete Poisson equation can accurately unpacks phase. It starts from the least square loss function, obtains the exact solution of the equation in the frequency domain through discrete cosine transform, and then inversely transforms to the space domain to obtain the least square solution of the equation. Simulation experiments and real data experiments show that the phase unwrapping algorithm based on the solution of discrete Poisson equation can overcome the inconsistency of path correlation methods, suppress noise errors and restore absolute phase.

Key words: phase unwrapping; least square; Poisson equation; phase-shifting interferometry

干涉仪利用光的叠加性来获取波的相位信息,从而测量光学镜片表面的形状,通常用于干涉的单色光波长小于 $1 \mu\text{m}$,因此干涉仪测量精度较高,光学镜片表面的一些微观疵病(如阴影、斑点、擦痕、破边等)都能通过干涉仪得到很好的检测。相移干涉^[1](phase-shifting interferometry, PSI)是一种常见的干涉测量技术,经过四次移相之后产生四幅干涉图,这些干涉图能够恢复出被测表面高度差的相位图,是相移干涉的关键。

收稿日期:2022-04-08

基金项目:金陵科技学院博士科研启动基金项目(jit-b-202113);金陵科技学院科研基金孵化项目(jit-flxm-202105)

作者简介:杨荣根(1979—),男,江苏海安人,副教授,博士,主要从事智能信息处理研究。

相移干涉测量技术所提取的相位值以反正切函数形式表示,受反正切函数值域的限制,其相位值被包裹在 $(-\pi, \pi)$ 范围内,并且不是绝对相位,要想得到绝对相位,就必须对这些包裹相位进行解包。常用的二维相位解包算法包括路径跟踪算法^[2]和路径无关算法^[3-5],其中典型的路径跟踪算法主要包含分枝切割算法和质量优先路径算法,典型的路径无关算法主要包含分区算法、强度传递方程算法^[6]和时域相位解包算法^[7]。

路径跟踪算法对路径的选择具有高度依赖性,会导致相位解包求解的结果不一致。强度传递方程算法求解复杂,计算过程需要经过多次傅里叶变换和逆傅里叶变换,才能得到求解结果。针对以上问题,本文提出了基于离散泊松方程求解的相位解包算法,不需要对干涉图进行阈值掩模,利用二维离散余弦变换求解泊松方程得到绝对相位^[8]。仿真实验和真实数据实验都表明:该方法能够克服路径相关方法的不一致性,抑制噪声误差,恢复真实相位。

1 方法原理

1.1 算法模型

设 ϕ_{ij} 为二维离散点 (i, j) 上的解包相位, φ_{ij} 为包裹相位,则有:

$$\phi_{ij} = \varphi_{ij} + 2\pi k(i, j) \quad (1)$$

其中, i 和 j 分别对应包裹相位图行和列的索引, $k(i, j)$ 为整数值函数, $-\pi \leq \varphi_{ij} \leq \pi$ 。

理论上,解包相位的差值应当和包裹相位的差值相等,因此,寻找已经解包的相邻像素点之间的解包相位差值,并与该相邻像素点之间的包裹相位差值相减,可得到最小二乘解。该最小二乘解就是最小二乘意义下的解包相位。

包裹相位沿 x 轴和 y 轴方向的梯度分别为:

$$\varphi_{ij}^x = \varphi_{ij} - \varphi_{i(j-1)} \quad (2)$$

$$\varphi_{ij}^y = \varphi_{ij} - \varphi_{(i-1)j} \quad (3)$$

其中,上标 x 和 y 分别指列像素相位差及行像素相位差。在 $M \times N$ 矩形图像上做最小二乘损失函数:

$$L = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\phi_{ij} - \phi_{i(j-1)} - \varphi_{ij}^x)^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\phi_{ij} - \phi_{(i-1)j} - \varphi_{ij}^y)^2 \quad (4)$$

求解 L 最小二乘意义下的解 ϕ_{ij} ,即可获得解包相位。

1.2 泊松方程

Hunt^[9]的矩阵公式给出了上述最小二乘损失函数的方程,即:

$$\phi_{(i+1)j} + \phi_{(i-1)j} + \phi_{i(j+1)} + \phi_{i(j-1)} - 4\phi_{ij} = \varphi_{ij}^x - \varphi_{i(j-1)}^x + \varphi_{ij}^y - \varphi_{(i-1)j}^y \quad (5)$$

该公式为包裹相位差与解包相位差的关系式,对其做简单的恒等变换,得到:

$$(\phi_{(i+1)j} - 2\phi_{ij} + \phi_{(i-1)j}) + (\phi_{i(j+1)} - 2\phi_{ij} + \phi_{i(j-1)}) = \rho_{ij} \quad (6)$$

其中 $\rho_{ij} = (\varphi_{ij}^x - \varphi_{i(j-1)}^x) + (\varphi_{ij}^y - \varphi_{(i-1)j}^y)$,即为包裹相位图 x 轴和 y 轴方向的二阶差分之和。

$M \times N$ 矩形网格上的离散泊松方程为:

$$\Delta \phi(x, y) = \rho(x, y) \quad (7)$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子。公式(7)对所有矩形网格点 $i=1, 2, \dots, M$ 和 $j=1, 2, \dots, N$ 都是有效的,被用于计算 ρ_{ij} 的相位差,仅在网格区域内不为零,这个限制源自最小二乘公式,因此可直接得出离散泊松方程的诺埃曼(Neumann)边界条件:

$$\begin{cases} \varphi_{i0}^x = 0, \varphi_{iN}^x = 0, i=1, 2, \dots, M \\ \varphi_{0j}^y = 0, \varphi_{Mj}^y = 0, j=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (8)$$

其中, φ_{i0}^x 和 φ_{iN}^x 分别表示包裹相位图第0列和第 N 列的梯度;同理, φ_{0j}^y 和 φ_{Mj}^y 分别表示第0行和第 M 行的梯度,它们都是边界上的梯度,都设置为0。在此条件下,解包相位差值与包裹相位差值之差的最小二乘解等于 $M \times N$ 矩形网格上具有诺埃曼边界条件的离散泊松方程的解。

1.3 离散余弦变换求解泊松方程

通过离散余弦变换来求解公式(7),二维离散余弦变换的一般式为:

$$X_{mn} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} 4x_{ij} \cos \left[\frac{\pi}{2M} m (2i+1) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2N} n (2j+1) \right]$$

$$0 \leq m \leq M-1; 0 \leq n \leq N-1 \quad (9)$$

二维离散余弦逆变换为:

$$x_{ij} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} W_1(m) W_2(n) X_{mn} \cos \left[\frac{\pi}{2M} m (2i+1) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2N} n (2j+1) \right] \quad (10)$$

$$0 \leq i \leq M-1; 0 \leq j \leq N-1$$

其中:

$$W_1(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m=0 \\ 1, & 1 \leq m \leq M-1 \end{cases} \quad W_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=0 \\ 1, & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (11)$$

其中, W_1 和 W_2 是位于频谱边界上的系数。若 x_{ij} 为解包相位的像素点, 则 X_{mn} 为像素点 x_{ij} 的二维离散余弦变换的谱值, 同时也为离散余弦变换域的精确解。重写公式(10)为:

$$\phi_{ij} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} W_1(m) W_2(n) \hat{\phi}_{mn} \cos \left[\frac{\pi}{2M} m (2i+1) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2N} n (2j+1) \right] \quad (12)$$

$$0 \leq i \leq M-1; 0 \leq j \leq N-1$$

其中, $\hat{\phi}_{mn}$ 为解包相位图的二维离散傅里叶变换的谱。将公式(12)代入公式(7), 经过化简整理得到解包相位在离散余弦变换域的解为:

$$\hat{\phi}_{ij} = \frac{\hat{\rho}_{ij}}{2 \left[\cos \left(\frac{\pi i}{M} \right) + \cos \left(\frac{\pi j}{N} \right) - 2 \right]} \quad (13)$$

其中, $\hat{\rho}_{ij}$ 为 ρ_{ij} 的二维离散余弦变换。对公式(13)进行二维离散余弦逆变换即可得解包相位 ϕ_{ij} , 使得公式(13)自动满足诺埃曼边界条件。

经过上面的模型推导, 可得到基于离散泊松方程求解的相位解包算法, 过程为: 1) 计算包裹相位沿 x 轴和 y 轴方向的二阶偏导并求和, 从而得到 ρ_{ij} ; 2) 对 ρ_{ij} 进行二维离散余弦变换, 得到 $\hat{\rho}_{ij}$; 3) 在二维离散余弦变换域按照公式(13)计算得到精确解 $\hat{\phi}_{ij}$; 4) 对 $\hat{\phi}_{ij}$ 进行二维离散余弦逆变换, 得解包相位 ϕ_{ij} 。

2 实验验证

2.1 仿真实验验证

为了验证该方法的有效性和抗噪性能, 实验设计了一个通过 Peaks 函数生成大小为 512×512 的矩阵绝对相位图像, 如图 1(a) 所示。利用解包算法对相位图像进行解包, 从而验证算法的有效性。在实际的干涉仪测量过程中会带入倾斜以及噪声, 所以为了让相位更加接近真实测量值, 在理想相位上添加倾斜因子和噪声项之后得到的相位图像如图 1(b) 所示, 其中 x 轴和 y 轴方向的倾斜因子分别为 0.02 和 0.01, 噪声为高斯白噪声, 噪声方差水平为 0.2。

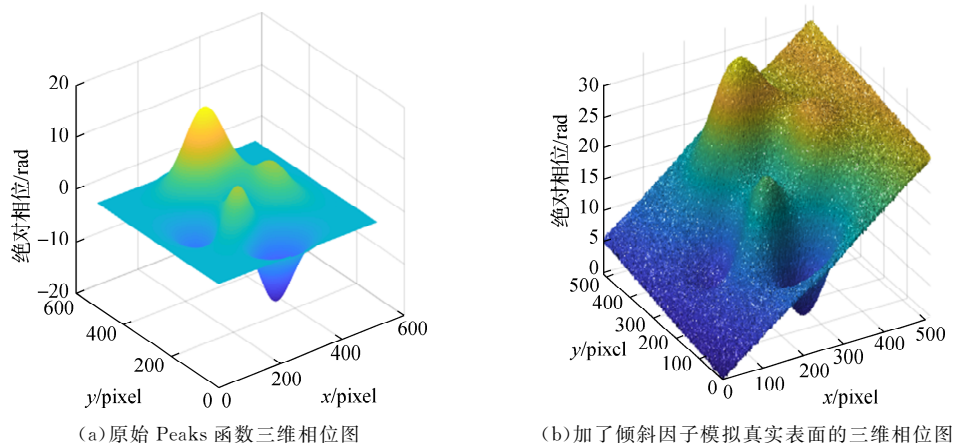


图 1 模拟相位图

由图 1 可知,真实相位不受 $(-\pi, \pi)$ 范围限制。将真实相位按照反正切函数的值域范围包裹图 1(b),得到如图 2(a)所示的包裹相位;利用基于离散泊松方程求解的相位解包算法来解包相位,得到如图 2(b)所示的解包相位。

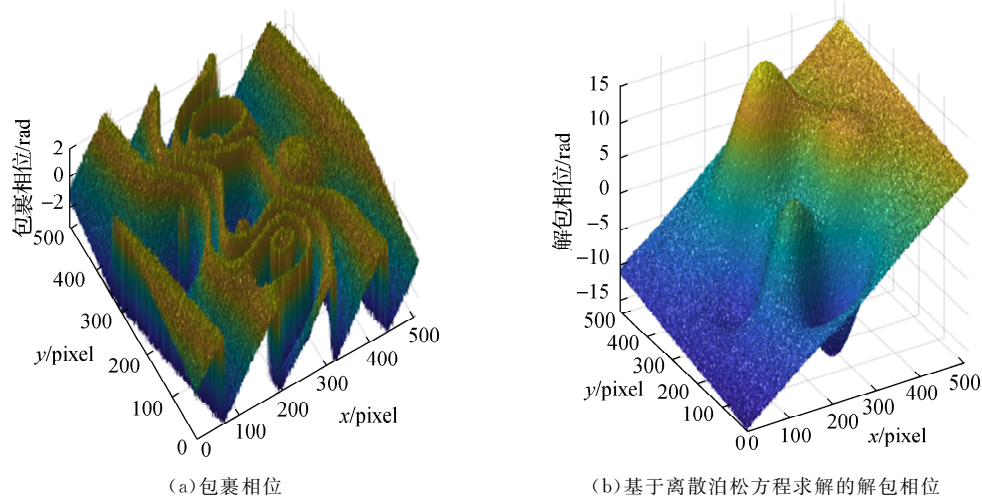


图 2 仿真实验相位图

通过比较不同倾斜因子和不同噪声方差水平对算法性能的影响来反映具体的误差情况,结果如表 1 所示。由表 1 可知:随着倾斜因子和噪声方差水平 σ 的增加,包裹相位和解包相位相邻像素的差值平方和 (ω, u) 都随之增大;而最小二乘损失值 L 和绝对误差 Ea 虽然会随着倾斜因子的增加而增大,但在同一倾斜因子条件下,不同噪声方差水平之间却保持相对稳定。这充分验证了基于离散泊松方程求解的相位解包算法能够很好地进行抗噪污染,说明该算法对噪声具有较好的鲁棒性,而且能克服路径跟踪相位解包算法对路径选择的依赖。此外,不同倾斜因子造成的差别可以在后续处理中通过曲面拟合得到倾斜系数来加以识别。

表 1 不同倾斜因子和不同噪声方差水平对算法性能的影响

x, y 轴 倾斜因子	参数	不同噪声方差水平				
		$\sigma=0.1$	$\sigma=0.2$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$
0.00,0.01	w	34 715.0	65 890.0	118 414.1	192 281.1	285 221.0
	u	41 882.4	73 135.4	125 582.0	199 353.6	292 551.9
	Ea	7 167.4	7 245.3	7 167.9	7 072.5	7 330.9
	Er	0.206	0.110	0.061	0.037	0.026
	L	72 556.7	72 558.6	72 557.8	72 561.7	72 592.9
0.02,0.01	w	88 112.6	119 430.0	171 848.4	245 357.2	340 356.3
	u	99 608.4	130 872.8	183 507.6	256 091.7	351 720.1
	Ea	11 495.7	11 442.9	11 659.3	10 734.5	11 363.8
	Er	0.130	0.096	0.068	0.044	0.033
	L	187 933.3	187 933.0	187 948.6	187 930.0	187 967.1
0.04,0.01	w	178 046.3	208 793.5	261 174.2	335 154.4	429 811.4
	u	193 004.8	224 405.1	276 572.1	350 538.5	445 969.4
	Ea	14 958.5	15 611.5	15 397.8	15 384.1	16 158.0
	Er	0.084	0.075	0.059	0.046	0.038
	L	357 219.3	357 214.5	357 195.7	357 221.3	356 869.1
0.06,0.01	w	303 420.6	335 220.0	386 205.0	459 939.0	555 338.0
	u	322 479.1	354 477.3	405 791.8	479 268.5	574 334.8
	Ea	19 058.5	19 257.3	19 586.8	19 329.4	18 996.8
	Er	0.063	0.057	0.051	0.042	0.034
	L	580 410.1	580 420.4	580 458.9	580 460.3	579 919.1

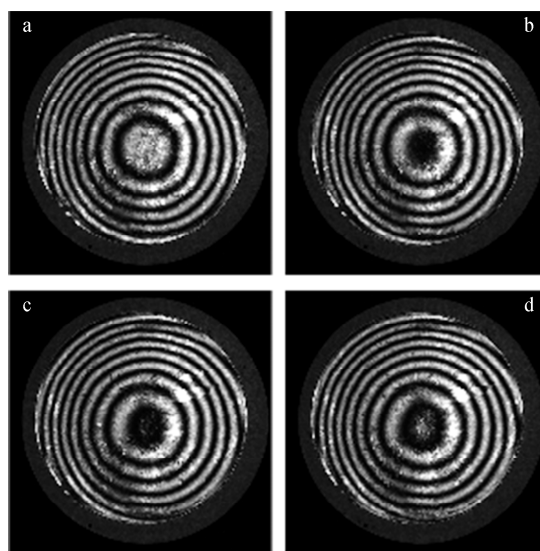
续表 1

x, y 轴 倾斜因子	参数	不同噪声方差水平				
		$\sigma=0.1$	$\sigma=0.2$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$
0.08,0.01	w	465 369.6	496 631.4	548 841.4	623 104.0	716 384.7
	u	487 914.4	519 752.3	571 097.8	644 463.8	739 818.8
	Ea	23 544.8	23 120.9	23 256.4	23 359.8	23 434.1
	Er	0.048	0.047	0.041	0.034	0.033
	L	857 494.4	857 487.6	857 471.7	857 459.0	856 183.5
0.10,0.01	w	663 504.1	694 850.8	748 004.7	819 335.7	912 887.3
	u	689 130.1	720 886.7	773 342.9	845 516.8	937 972.2
	Ea	25 626.1	26 035.9	25 338.1	26 181.1	25 084.9
	Er	0.039	0.037	0.034	0.032	0.027
	L	1 188 445.0	1 188 441.0	1 188 404.1	1 188 447.5	1 188 720.2

注:倾斜因子相对 x 轴和 y 轴是对称的,因此固定 y 轴的倾斜因子只改变 x 轴的倾斜因子,分为 6 个不同水平,即在 0 到 0.1 之间平均分布。 w 和 u 分别表示包裹相位和解包相位的相邻像素之间差的平方和, Ea 和 Er 分别表示绝对误差和相对误差, L 表示最小二乘损失值。

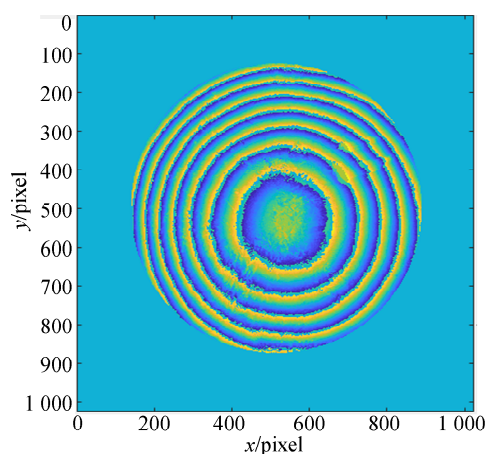
2.2 真实数据实验验证

实验利用自制的移相干涉仪(即菲佐干涉仪)来测定一个表面凸起的光学镜片形状,试图通过干涉图像能够恢复出与光学镜片表面形状一致的绝对相位图。干涉仪输出的 4 幅干涉图像如图 3 所示,根据相移干涉的原理计算出包裹相位,如图 4 所示。利用基于离散泊松方程求解的相位解包算法,计算出图 4 中相位沿坐标轴方向的二阶偏导,并求和;然后借助二维离散余弦变换在频率域中求得解包相位的精确解;最后通过离散余弦逆变换得到解包相位,如图 5 所示,其中图 5(b)为解包相位的三维图,能够反映出光学镜片的表面轮廓,并且其纵坐标表明相位已经被延展到 $(-\pi, \pi)$ 之外的区域。

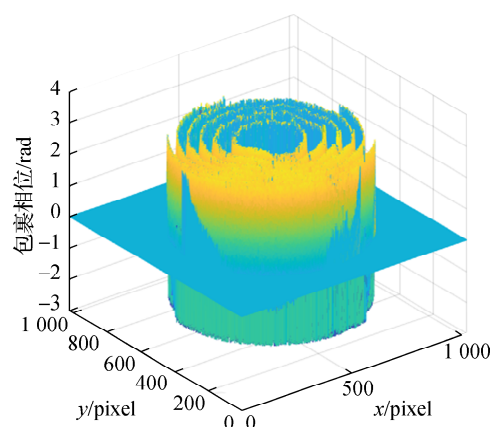


注:由 a 图开始依次移相 $\frac{\pi}{2}$, 分别得到 b、c、d 图。

图 3 菲佐干涉仪测得光学镜片的 4 幅干涉图像



(a)包裹相位的平面图



(b)包裹相位的三维图

图 4 包裹相位图

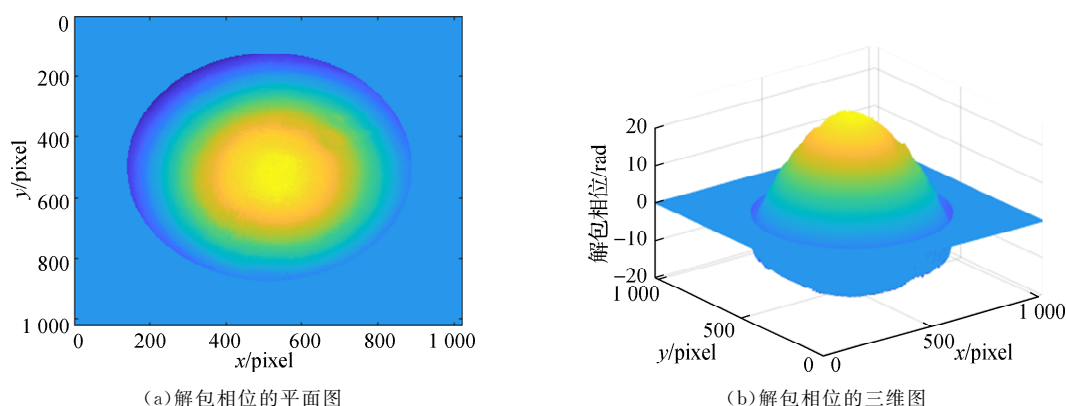


图 5 解包相位图

为了验证基于离散泊松方程求解的相位解包算法在真实数据上的有效性,将干涉仪输出的 4 幅干涉图输入到 ZYGO 干涉仪中,得到的计算结果和本文的结果一致,进一步验证了本文算法的有效性。

有了被测件的解包相位之后,可根据相位与被测件表面高度之间的映射关系,将绝对相位值映射到被测件的表面高度,进而得到表面凹陷或者凸出的绝对高度,在此情况下被测件的表面质量就一目了然了。

3 结 语

干涉仪常常用来测量光学镜片表面的形貌,测量精度可以达到纳米级。但是干涉仪的研制在国内还比较少,在干涉仪配套的软件开发过程中,相位解包是一个比较困难的程序,虽然在原理上相位解包的方法比较多,如空间域解包和频率域解包等,但在实际的干涉仪测量过程中,由于各种污染、噪声等的干扰,测量结果并不能满足要求。针对此缺陷,本文提出了基于离散泊松方程求解的相位解包算法,并通过仿真实验证明了该算法对噪声不敏感,具有很强的抗噪声能力,能够克服路径跟踪方法对路径选择的依赖性,能够使解包相位每次所作的结果保持一致。此外,还通过真实数据实验证明了本文算法计算得到的绝对相位与 ZYGO 干涉仪计算得到的绝对相位相一致,这就进一步验证了本文算法的有效性。

参考文献:

- [1] AI C, WYANT J C. Effect of spurious reflection on phase shift interferometry[J]. *Applied Optics*, 1988, 27(14): 3039 - 3045
- [2] AN H H, CAO Y P, WU H T, et al. A novel spatial phase-unwrapping method based on single-pixel binarized line pattern for real-time 3D measurement[J]. *Journal of Optics*, 2021, 23(8): 085702
- [3] XIONG T, YANG J, ZHANG W, et al. Phase unwrapping method based on image segmentation[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2008, 29(16): 4871 - 4877
- [4] HAN X, WANG L, FU Y J. Phase unwrapping method based on dual-frequency heterodyne combined with phase encoding[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2019, 48(9): 913003 - 913011
- [5] AIZEN A, ABDULHALIM I. Phase unwrapping using the extracted degree of coherence and phase from phase shifting interferometry systems[J]. *Optics Express*, 2021, 29(21): 34278 - 34292
- [6] MARTINEZ C J, FALAGGIS K, KOZACKI T. Fast and accurate phase-unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(25): 7079 - 7088
- [7] GONG C G, LEI S G, BIAN Z F, et al. Using time series InSAR to assess the deformation activity of open-pit mine dump site in severe cold area[J]. *Journal of Soils and Sediments*, 2021, 21(11): 3717 - 3732
- [8] 廖雪竹. 求解二维泊松方程的快速边界积分方程法[D]. 成都: 电子科技大学, 2021
- [9] HUNT B R. Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, 69(3): 393 - 399

(责任编辑:谭彩霞)