第 35 卷 第 4 期
2019 年 12 月
金陵科技学院学报
JOURNAL OF JINLING INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 35, No. 4
Dec., 2019

DOI:10.16515/j.cnki.32-1722/n.2019.04.016

非利普希茨条件下由 G -布朗运动驱动的倒向随机微分方程的比较定理

袁明霞[1],王丙均[2*]

(1.南京大学金陵学院基础部,江苏 南京 210089;
2.金陵科技学院理学院,江苏 南京 211169)

摘 要:研究了由 G -布朗运动驱动的倒向随机微分方程

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

的解的比较定理。其中 $f(s,y,z)$,$g(s,y,z)$关于变量 y 单调且线性增长,关于变量 z 利普希茨连续。

关键词:倒向方程;单调;G -布朗运动;比较定理

中图分类号:O172 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-755X(2019)04-0071-04

Comparison Theorem of Backward Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion with Non-Lipschitz Condition

YUAN Ming-xia[1], WANG Bing-jun[2*]

(1. Nanjing University, Nanjing 210089, China; 2. Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: In this paper, $Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, the comparison theorem of backward stochastic differential equations driven by G-Brownian motion with non-Lipschitz condition is studied, where $f(s,y,z)$, $g(s,y,z)$ are monotone and linear growth in y, and are Lipschitz in z.

Key words: backward equation; monotone; G-Brownian motion; comparison theorem

为了解决金融中所出现的风险度量和套期保值等不确定性问题,Peng S.[1]系统地建立了 G -期望理论。平行于已知的线性期望理论,包括 G -布朗运动、G -伊藤积分、G -伊藤公式、G -鞅表示定理、Girsanov 变换,由 G -布朗运动驱动的随机微分方程等 G -期望框架下的理论正在被建立起来[2-5]。由 G -布朗运动驱动的倒向随机微分方程(BGSDE):

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

近年来也受到许多学者的关注。在生成元 f 满足利普希茨条件时,Hu M[6]证明了方程存在唯一的一组解(Y,Z,K),并得到了方程的解的比较定理,费曼-卡茨定理[7]。在 f 不满足利普希茨条件时,关于

收稿日期:2019-11-18
基金项目:国家自然科学基金(11601203);金陵科技学院博士科研启动基金(jit-b-201836);南京大学金陵学院项目(0010521828)
作者简介:袁明霞(1983—),女,山东聊城人,讲师,硕士,主要从事随机微分方程研究。
通信作者:王丙均(1982—),男,江苏徐州人,讲师,博士,主要从事随机微分方程研究。

上述方程的解的存在唯一性，最近也得到了证明。宋阳[8]在生成元 f 关于变量 z 是利普希茨连续的，关于变量 y 仅仅是线性增长和单调的条件下，证明了方程存在唯一的解。在文献中，作者构造了一个逼近序列，证明了这个逼近序列的极限正是方程的解。然而关于这个不满足利普希茨条件的方程的解的比较定理，尚未有相应的结论。本文利用已有的一些结论，证明了这个方程的比较定理。

1 预备知识

回顾 G－期望框架下的一些结论，更详细的内容可参见文献[1－2]。

记 $\Omega_t=C_0(0,T)$ 为定义在 $(0,T)$ 上的所有实值连续函数构成的集合，其中，$w_0=0$。

定义在这个集合上的距离为：

$$d(w_1,w_2)=\sum_{N=1}^{\infty}(\max_{0\leqslant t\leqslant N}(|w_1-w_2|\wedge 1))$$

记 $B_t(w)=w_t$ 为典则过程，令：

$$Lip(\Omega_T)=\{\varphi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})\mid n\geqslant 1,t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0,T],\forall\varphi\in C_{b,lip}(R^n)\}$$

其中，$C_{b,lip}(R^n)$ 为定义在 R^n 上的有界利普希茨函数构成的集合。称定义在 $Lip(\Omega_T)$ 上的次线性泛函 E 为次线性期望，若 E 满足：对 $\forall X,Y\in Lip(\Omega_T)$，有

(1)单调性：$E(X)>E(Y)$，若 $X>Y$；

(2)保常性：$E(C)=C$，若 $C\in R$；

(3)次可加性：$E(X+Y)<E(X)+E(Y)$；

(4)正齐性：$E(\lambda X)=\lambda E(X)$，$\lambda>0$。

此时，称 $(\Omega_T,Lip(\Omega_T),E)$ 为次线性期望空间，$X\in Lip(\Omega_T)$ 为随机变量。

定义 1.1：称随机变量 X 服从参数为 $(0,[\underline{\sigma}^2,\bar{\sigma}^2])$ 的 G－正态分布，即 $X\sim N(0,[\underline{\sigma}^2,\bar{\sigma}^2])$。若对每个 $\varphi\in C_{b,lip}(R)$，$u(t,x):=E[\varphi(x+\sqrt{t}X)]$ 是如下方程的黏性解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-G\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0,\\ u_{t_0}=\varphi(x),\end{cases}$$

其中 $G(a):=\dfrac{1}{2}(a^+\bar{\sigma}^2-a^-\underline{\sigma}^2)$，$a\in R$。

定义 1.2：称次线性期望 $\hat{E}:Lip(\Omega_T)\to R$ 为 G－期望，若典则过程 B_t 在 $\hat{E}$ 下为 G－布朗运动，即对于任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，$B_t-B_s\sim N(0,[\underline{\sigma}^2(t-s),\bar{\sigma}^2(t-s)])$，且对于任意的 $n>0$，$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant T$，$\varphi\in Lip(\Omega_T)$，

$$\hat{E}[\varphi(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})]=\hat{E}[\psi(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_{n-1}})],$$

其中 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}):=\hat{E}[\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\sqrt{t_n-t_{n-1}}B_1)]$。

对 $p\geqslant 1$，记 $L_G^p(\Omega_T)$ 为 $Lip(\Omega_T)$ 在范数 $\|X\|_{p,G}:=(\hat{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间。实际上，$\hat{E}:Lip(\Omega_T)\to R$ 在范数 $\|X\|_{1,G}$ 下是一个连续映射，可以将其连续延拓到 $L_G^1(\Omega_T)$ 上。

设 $\pi_T^N=t_0,t_1,\cdots,t_N$ 为 $[0,T]$ 的一个分割，考虑如下的简单过程：

$$\eta_t(w)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)I_{[t_k,t_{k+1})}(t),$$

其中 $\xi_k(w)\in L_G^p(\Omega_{t_k})$，$k=0,1,\cdots,N-1$。所有这样的简单过程构成的集合记为 $M_G^{p,0}(0,T)$，它在范数 $\|\eta\|_{M_G^p(0,T)}:=\left(\hat{E}\int_0^T|\eta|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$，$\|\eta\|_{H_G^p(0,T)}:=(\hat{E}[\int_0^T|\eta|^2\mathrm{d}t]^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间分别记为 $M_G^p(0,T)$，$H_G^p(0,T)$。

对于 $\eta_t\in M_G^2(0,T)$，定义伊藤积分 $I:M_G^2(0,T)\to L_G^2(\Omega_T)$ 为：

$$I(\eta):=\int_0^t\eta_s\mathrm{d}B_s$$

和经典的布朗运动不同，G -布朗运动 B_t 的二次变差不是一个常数，而是一个 $L_G^1(\Omega_t)$ 中的一个连续非降的过程，且有如下表示：

$$\langle B\rangle_t := \lim_{\mu(\pi_t^N)\to 0}\sum_{k=1}^{N-1}(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2 = (B_t)^2 - 2\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$

对于 $\eta_t\in M_G^1(0,T)$，也可以定义积分 $\int_0^t \eta_s \mathrm{d}\langle B\rangle_s$。

记：

$$S_G^0(0,T)=\{h(t,B_{t_1\wedge t},\cdots,B_{t_n\wedge t}):t,t_1,\cdots,t_n\in[0,T],h\in C_{b,lip}(R^{n+1})\}$$

对于 $p\geqslant 1,\eta\in S_G^0(0,T)$，记 $\|\eta\|_{S_G^p(0,T)}=(\hat{E}[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_t|^p])^{\frac{1}{p}}$。$S_G^0(0,T)$ 在范数 $\|\eta\|_{S_G^p(0,T)}$ 下的完备化空间记为 $S_G^p(0,T)$。

2　主要结论

引理 2.1[6]：设对于任意的 $w\in\Omega,y,y',z,z'\in R,\beta>1$，

(1) $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T),f(\cdot,y,z),g(\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T)$；

(2) 存在常数 $L>0$，使得：

$$|f(t,w,y,z)-f(t,w,y',z')|\vee|g(t,w,y,z)-g(t,w,y',z')|\leqslant L(|y-y'|+|z-z'|),$$

则如下 BGSDE：

$$Y_t = \xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s-(K_T-K_t) \tag{2.1}$$

存在唯一的一组解 (Y,Z,K)。更进一步，对任意的 $1<\alpha<\beta$，有 $Y\in S_G^\alpha(0,T)Z\in H_G^\alpha(0,T),K\in L_G^\alpha(\Omega_T)$。

引理 2.2[7]：设 $(Y_t^i,Z_t^i,K_t^i)_{t\leqslant T},i=1,2$，是下列 BGSDE：

$$Y_t^i = \xi^i+\int_t^T f_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}s+\int_t^T g_i(s,Y_s^i,Z_s^i)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s^i \mathrm{d}B_s-(K_T^i-K_t^i)$$

的解，其中 $\xi^i\in L_G^\beta(\Omega),f_i(\cdot,y,z),g_i(\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T)$，而 f_1,g_1 和 f_2,g_2 中有一组满足利普希茨条件。若 $\xi^1\geqslant\xi^2,f_1\geqslant f_2,g_1\geqslant g_2$，则 $Y_t^1\geqslant Y_t^2$。

在文献[8]中，作者考虑了方程(2.1)，其中 ξ,f,g 满足：对任意的 $w\in\Omega,x,y,y',z,z'\in R,\beta>1$，

(H1) $f(\cdot,\cdot,y,z),g(\cdot,\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T),\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$；

(H2) f,g 在最大模范数下关于 w 一致连续；

(H3) f,g 关于 z 是利普希茨连续的，即存在常数 $C>0$，有：

$$|f(t,w,y,z)-f(t,w,y,z')|\vee|g(t,w,y,z)-g(t,w,y,z')|\leqslant C|z-z'|;$$

(H4) f,g 关于 y 一致连续，且满足线性增长条件，即存在常数 $C>0$，有：

$$|f(t,w,y,z)|\vee|g(t,w,y,z)|\leqslant|f(t,w,0,z)|+C(1+|y|);$$

(H5) 存在常数 $\mu\geqslant 0$，使得：

$$(y-y')(f(t,w,y,z)-f(t,w,y',z))\vee(y-y')(g(t,w,y,z)-g(t,w,y',z))\leqslant\mu|y-y'|。$$

对于满足条件(H1)～(H5)的 f 和 g，利用文献[9]中的方法，作者构造了如下的序列：

$$\varphi_n(t,y,z):=\inf_{u\in Q}\{\varphi(t,u,z)+n|y-z|\},\qquad \varphi=f,g。\tag{2.2}$$

由于 $\varphi_n(t,y,z)$ 关于变量 y 和 z 是利普希茨连续的，由引理 2.1，如下 BGSDE：

$$Y_t^n = \xi+\int_t^T f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s+\int_t^T g_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}\langle B\rangle_s-\int_t^T Z_s^n \mathrm{d}B_s-(K_T^n-K_t^n) \tag{2.3}$$

存在唯一的解 (Y^n,Z^n,K^n)。

另外，由于 $\varphi_n(t,y,z)$ 关于 (y,z) 是一致收敛的，作为方程(2.1)的极限，文献[8]证明了如下定理。

定理 2.1：在 f 和 g 满足条件(H1)～(H5)时，方程(2.1)存在唯一解，且对任意的 $1<\alpha<\beta$，有 $Y\in S_G^\alpha(0,T)Z\in H_G^\alpha(0,T),K\in L_G^\alpha(\Omega_T)$。

定理 2.2:设$(Y_t^i, Z_t^i, K_t^i)_{t\leqslant T}$,$i=1,2$,是下列 BGSDE:

$$Y_t^i = \xi^i + \int_t^T f_i(s, Y_s^i, Z_s^i)\mathrm{d}s + \int_t^T g_i(s, Y_s^i, Z_s^i)\mathrm{d}\langle B\rangle_s - \int_t^T Z_s^i \mathrm{d}B_s - (K_T^i - K_t^i)$$

的解,其中 $\xi^i \in L_G^\beta(\Omega_T)$,$f_i, g_i$ 满足(H1)~(H5)。若 $\xi^1 \geqslant \xi^2$,$f_1 \geqslant f_2$,$g_1 \geqslant g_2$,则对于任意的 $0\leqslant t\leqslant T$,有 $Y_t^1 \geqslant Y_t^2$。

证明:设$(Y^{2,n}, Z^{2,n}, K^{2,n})$是方程:

$$Y_t^{2,n} = \xi^2 + \int_t^T f_{2,n}(s, Y_s^{2,n}, Z_s^{2,n})\mathrm{d}s + \int_t^T g_{2,n}(s, Y_s^{2,n}, Z_s^{2,n})\mathrm{d}\langle B\rangle_s - \int_t^T Z_s^{2,n}\mathrm{d}B_s - (K_T^{2,n} - K_t^{2,n})$$

的解,其中 $f_{2,n}, g_{2,n}$是 f_2, g_2 的逼近序列,其定义如(2.2)。

另外,由定理条件,显然有 $f_1 \geqslant f_{2,n}$,$g_1 \geqslant g_{2,n}$。根据引理 2.2,对于 $t\in[0,T]$,

$$Y_t^1 \geqslant Y_t^{2,n}$$

注意到,在 $S_G^\alpha(0,T)$中,$Y_t^{2,n}$ 收敛到 Y_t^2。所以,在上式中,令 $n\to\infty$,则有

$$Y_t^1 \geqslant Y_t^2$$

3 结 语

本文证明了单调性条件下由 G -布朗运动驱动的倒向随机微分方程的解的比较定理。在后续的工作中,可以继续研究此方程在单调性条件下所满足的费曼-卡茨公式。

参考文献:

[1] Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty[EB/OL]. (2013 - 06 - 28)[2019 - 10 - 19]. http://www.mathsumu.com/forum.php?mod

[2] Denis L, Hu M, Peng S, Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownain motion paths[J]. Potential Anal, 2011, 34: 139 - 161

[3] Bai X, Lin Y. On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by G-Brownian motion with integral-Lipschitz coefficients[J]. Acta Math Appl Sini Engl Ser, 2014, 30: 589 - 610

[4] 王丙均,袁明霞,张慧. 局部非利普希茨条件下 G-随机微分方程的解的逼近[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 2016, 39: 26 - 32

[5] Gao F. Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion[J]. Stoch Proc Appl, 2009, 119: 3356 - 3382

[6] Hu M, Ji S, Peng S, et al. Backward stochastic differential equation driven by G-Brownian motion[J]. Stoch Proc Appl, 2014, 124: 759 - 784

[7] Hu M, Ji S, Peng S, et al. Comparison theorem, Feynman-Kac formula and girsanov transformation for BSDEs driven by a G-Brownian motion[J]. Stoch Proc Appl, 2014, 124: 1170 - 1195

[8] 宋阳. 单调性条件下 G-Brownian 运动驱动的倒向随机微分方程[J]. 数学年刊 A 辑, 2019, 40: 177 - 198

[9] Lepeltier J P, Martinand J S. Backward stochastic diffferential equations with continuous coefficients[J]. Statistics and Probability Letters, 1997, 34: 425 - 430

(责任编辑:谭彩霞)