

求解 Kuramoto-Sivashinsky 方程的 有限体积一次元方法

卢付强¹, 姜婷婷², 丁凯孟^{3*}

(1. 常州工学院计算机信息工程学院, 江苏 常州 213022; 2. 吉宝通讯(南京)有限公司, 江苏 南京 211189;
3. 金陵科技学院网络与通信工程学院, 江苏 南京 211169)

摘要: Kuramoto-Sivashinsky(K-S)方程是一个非线性四阶偏微分方程, 常被用于反应扩散系统的动力过程建模。首先引入一个新变量, 将方程转化为一个低阶的方程组, 然后采用有限体积一次元方法对其空间变量进行离散近似, 时间积分采用2阶Runge-Kutta格式, 在数值实验中采用所提出的方法分别对激波解以及混沌现象进行数值模拟。结果表明: 提出的有限体积元方法能够对以上各种现象进行有效模拟。

关键词: Kuramoto-Sivashinsky 方程; 数值近似; 有限体积一次元方法; Runge-Kutta 格式

中图分类号: O241.8

文献标识码: A

文章编号: 1672-755X(2019)04-0066-05

Finite Volume Linear Element Method for the Solution of the Kuramoto-Sivashinsky Equation

LU Fu-qiang¹, JIANG Ting-ting², DING Kai-meng^{3*}

(1. Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213022, China; 2. Keppel Communication (Nanjing) Co., Ltd.,
Nanjing 211189, China; 3. Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: The Kuramoto-Sivashinsky(K-S) equation belongs to nonlinear four-order partial differential equations(PDEs), which is commonly used for the modelling of dynamics in reaction-diffusion systems. In this paper, a new variable was introduced and then the K-S equation could be converted into low-order equations. Then the finite volume linear element method was used to approximate the space derivatives of the equations. As for the time integration, two-order explicit Runge-Kutta scheme was utilized, numerical experiments, including two travelling shock waves, a chaotic phenomenon would be simulated by the proposed method respectively. The results demonstrate that our method could simulate all the above experiments successfully.

Key words: Kuramoto-Sivashinsky equation; numerical approximation; finite volume linear element method; Runge-Kutta scheme

Kuramoto-Sivashinsky(K-S)方程由Kuramoto与Sivashinsky于20世纪70年代末提出, 是一种四阶的偏微分方程, 是许多物理现象中出现的一类重要的数学物理方程, 用于描述一个反应扩散系统^[1]。K-S

收稿日期: 2019-06-12

基金项目: 国家自然科学基金(41801303); 江苏省自然科学基金(BK200170116); 金陵科技学院孵化项目(jit-fhxm-201604); 常州工学院基金项目(YN1712); 2019年度江苏省高校“青蓝工程”项目

作者简介: 卢付强(1984—), 男, 河南信阳人, 讲师, 博士, 主要从事偏微分方程等研究。

通信作者: 丁凯孟(1985—), 男, 山西长治人, 副教授, 博士, 主要从事深度学习等研究。

方程被认为是无穷维动力学中具有代表性的模型之一,其动力特性具有很好的普适性^[2]。该方程具有内在稳定性与不稳定性相互作用,可以很好地模拟火焰峰的不稳定性、热传导、氧化反应扩散、自由膜的流动等问题。

目前,采用数值近似求解是研究 K-S 方程模型的主要方法之一,包括样条函数配置方法^[3]、谱方法^[4]、有限差分方法^[5-6]、有限元方法^[7-8]、间断伽辽金方法^[9]、无网格方法^[10]以及格子玻尔兹曼方法^[11]等。这些方法都是数值近似比较流行的方法之一。近些年,数值方法-有限体积元方法得到迅速发展与应用,该方法兼具有限元与有限体积方法的优点。本文采用有限体积线性元对方程的空间变量进行近似,构造半离散数值格式,并采用显式 2 阶 Runge-Kutta 格式进行时间积分。

K-S 方程的一般形式为:

$$u_t + uu_x + \mu u_{xx} + \lambda u_{xxxx} = 0, \quad x \in [a, b], t \in [0, T] \quad (1)$$

其中,边界条件为: $u(a, t) = g_0, u(b, t) = g_1, u_x(a, t) = 0, u_x(b, t) = 0, u_{xx}(a, t) = 0, u_{xx}(b, t) = 0$

初始条件为: $u(x, 0) = u_0(x)$ 。

可以看出方程(1)非常类似于一个对流扩散方程,再添加一个超双曲耗散效应项,其中 μ, λ 分别为二阶耗散项与四阶超双曲耗散项的系数。首先将方程的平流项改写为通量形式:

$$u_t + (u^2)_x/2 + \mu v + \lambda v_{xx} = 0 \quad (2)$$

引入新变量 $v = u_{xx}$, 将式(2)转化为微分方程组:

$$v = u_{xx}, \quad u_t + (u^2)_x/2 + \mu v + \lambda v_{xx} = 0 \quad (3)$$

在上述方程组(3)各子方程两边分别乘以试探函数 $w(x)$, 应用分部积分, 得:

$$(v, w) = (u_{xx}, w), \quad (u_t, w) + ((u^2)_x/2, w) + (\mu v, w) + (\lambda v_{xx}, w) = 0 \quad (4)$$

故对应的变分问题: 寻找 $u, v \in H^1(a, b)$ 使得初边值条件式(1)成立, $\forall t > 0$, 满足:

$$(v, w) = a(u, w), \quad (u_t, w) + (f_x, w)/2 + (\mu v, w) + a(\lambda v, w) = 0 \quad (5)$$

其中 $(u, w) = \int_a^b u \cdot w dx, a(u, w) = \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot w dx, f = u^2$ 。

1 方程的数值近似算法

1.1 空间离散

本文采用有限体积一次元方法对方程组(5)的空间变量进行离散近似。首先对区间 $[a, b] = I$ 做等距剖分 T_h , 结点记为: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ 。剖分 $T_h = \{I_i : I_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N\}$ 。单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 的长度为: $h = x_i - x_{i-1}$, 再做 T_h 的对偶剖分 T_h^* , 采用集合表示为: $T_h^* = \{I_i^* : I_i^* = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], i = 1, 2, \dots, N-1, I_0^* = [x_0, x_{1/2}], I_N^* = [x_{N-1/2}, x_N]\}$, 其中 $x_{i-1/2}$ 是单元 I_i 中点, 即 $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2, i = 1, 2, \dots, N$, 如图 1 所示, 显示了格网的结点与中点, 为了计算边界处的导数, 需要在左右边界处各向外增加 1 个虚单元结点, 即 x_{-1} 与 x_{N+1} 。图 1 所示网格单元结点以及其中心。

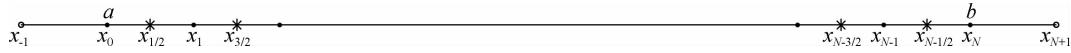


图 1 格网的等距剖分

其中,实心点表示格网结点,星号表示格网单元中心,空圈表示添加的虚格网结点。现选取试探函数空间 U_h 为相应于剖分 T_h 的一次有限元空间。 $U_h = \{u_h \subset C(h)\}$, u_h 在每一个 I_i 上是线性函数,由单元的端点值唯一确定。选取检验函数空间为格网对偶剖分 T_h^* 的分片常数空间: $\forall w_h \subset W_h$, 其中 w_h 在每一个 I_j^* 上为常数,所以 W_h 的基函数可取为: $\phi_j(x) = 1, x \in I_j^*$, 在其他区域为 0。寻找问题的近似解具有形式:

$$U_h^N(x, t) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x); \quad V_h^N(x, t) = \sum_{i=0}^N v_i \phi_i(x) \quad (6)$$

其中 u_i, v_i 是含时间 t 的待求参数。根据已知的边界条件有: $U_h^N(x_0, t) = u(a, t), U_h^N(x_N, t) = u(b, t)$ 。

同时可知: $V_h^N(x_0, t) = u_{xx}(a, t), V_h^N(x_N, t) = u_{xx}(b, t)$ 。因为在单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上, 有:

$$U_h^N(x, t) = u_{i-1}\phi_{i-1}(x) + u_i\phi_i(x) = u_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + u_i\frac{x - x_{i-1}}{h}$$

所以其一阶偏导近似为: $\frac{\partial U_h^N(x, t)}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ 。与上面选取的试探函数空间与检验函数空间相对应,有限

体积一次元格式为:

$$\left\{ \begin{aligned} (V_h^N, \psi_j(x)) &= a(U_h^N, \psi_j(x)) \\ \left(\left(\frac{\partial U_h^N}{\partial t}, \psi_j(x) \right) + (f(U_h^N)_x/2, \psi_j(x)) + (\mu V_h^N, \psi_j(x)) + a(\lambda V_h^N, \psi_j(x)) \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (7a)$$

$$\left. \left(\left(\frac{\partial U_h^N}{\partial t}, \psi_j(x) \right) + (f(U_h^N)_x/2, \psi_j(x)) + (\mu V_h^N, \psi_j(x)) + a(\lambda V_h^N, \psi_j(x)) \right) = 0 \right. \quad (7b)$$

采用有限体积线性元对方程组的空间进行近似,首先计算:

$$(f_x/2, \psi_j(x)) = \int_a^b f_x \psi_j(x) dx = f \psi_j \Big|_a^b - \int_a^b f \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx = (f_{j+1} - f_{j-1})/2$$

$$a(u, \psi_j(x)) = \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \psi_j dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h}$$

$$\left(\frac{\partial U_h^N}{\partial t}, \psi_j(x) \right) = \int_a^b \frac{\partial U_h^N}{\partial t} \psi_j dx = \int_{I_j^*} \frac{\partial U_h^N}{\partial t} dx = h \dot{u}_j$$

$$\text{子方程(7a)的结果为: } h \dot{u}_j = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h}.$$

若记 $\frac{du_j}{dt} = \dot{u}_j$, 则子方程(7b)的最终结果为:

$$h \dot{u}_j = - \left[\frac{(u_{j+1})^2 - (u_{j-1})^2}{2} + \mu v_j h + \lambda \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{h} \right]$$

将方程组的半离散格式写为矩阵向量形式:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} * \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}; \quad \dot{\mathbf{U}} = -[\mathbf{A} * (\mathbf{U} * \mathbf{U}) + \hat{\mathbf{U}}_2 + \mu \mathbf{V} + \lambda (\mathbf{B} * \mathbf{V} + \hat{\mathbf{V}})] \quad (8)$$

其中 $\mathbf{V}, \mathbf{U}, \hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{U}}_2$ 为 $(N+1) \times 1$ 的列向量,如下:

$$\mathbf{V} = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_N]^T, \quad \hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{h^2} [v_{-1}, 0, 0, \dots, v_{N+1}]^T, \quad \hat{\mathbf{U}} = \frac{1}{h^2} [u_{-1}, 0, 0, \dots, u_{N+1}]^T$$

$$\mathbf{U} = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_N]^T, \quad \hat{\mathbf{U}}_2 = \frac{1}{2h} [-(u_{-1})^2, 0, 0, \dots, 0, (u_{N+1})^2]^T$$

其中虚网格的值 $u_{-1}, u_{N+1}, v_{-1}, v_{N+1}$ 通过边界条件得到, \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 $(N+1) \times (N+1)$ 的矩阵,形式如下:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

1.2 时间积分

为了完整求解此方程组,还需要对半离散格式(8)进行时间积分,采用 2 阶显式 Runge-Kutta 方法:

$$\mathbf{V}^0 = \mathbf{B} * \mathbf{U}^0 + \hat{\mathbf{U}}^0; \quad \mathbf{K}_1 = -[\mathbf{A} * (\mathbf{U}^0 * \mathbf{U}^0) + \hat{\mathbf{U}}_2^0 + \mu \mathbf{V}^0 + \lambda (\mathbf{B} * \mathbf{V}^0 + \hat{\mathbf{V}}^0)]; \quad \mathbf{U}^{K1} = \mathbf{U}^0 + dt/2 * \mathbf{K}_1;$$

$$\mathbf{V}^1 = \mathbf{B} * \mathbf{U}^{K1}; \quad \mathbf{K}_2 = -[\mathbf{A} * (\mathbf{U}^{K1} * \mathbf{U}^{K1}) + \hat{\mathbf{U}}_2^{K1} + \mu \mathbf{V}^1 + \lambda (\mathbf{B} * \mathbf{V}^1 + \hat{\mathbf{V}}^1)]; \quad \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^0 + dt * \mathbf{K}_2;$$

其中 dt 为离散的时间步长, \mathbf{U}^0 为初始值, 每迭代一次, 则需要对虚格网点上值进行更新。

2 数值实验

为评估方法的精确性,下面给出几个数值算例验证方法的有效性。假定 U_i^k, u_i^k 分别是方程的数值解与真解,并定义如下两个误差范数:

$$L_2 = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |U_j^k - u_j^k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad L_{\infty} = \text{Max} |U_j^k - u_j^k|$$

数值实验 1: 震荡的行波解。

考虑 K-S 方程, 系数取值为 $\mu=1, \lambda=1$ 。在此情形下, 方程具有精确解:

$$u(x, t) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9 \tanh(k(x - ct - x_0)) + 11 \tanh^3(k - (x - ct - x_0)))$$

初值与边界条件为: $u(-30, t) = g1(t), u(30, t) = g2(t); u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0)$ 。

其中边界条件 $g1(t), g2(t)$ 与初始条件由精确解得到, 参数 x_0 表示激波轮廓的初始位置, c 表示波的传播速度, k 表示波数, 分别取值为 $x_0 = -10, k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}, c = 2$ 。这里采用线性元对此问题进行近似模拟。

为了评估方法的精确性, 在区间 $x \in [-30, 30]$ 取均匀分布的结点, 并在 $t = 8$ s 时刻求方程的近似解。表 1 给出了有限体积一次元的绝对 L_∞ 误差和 L_2 误差。

表 1 有限体积线性元数值解与真解的误差

h	dt	L_∞ 误差	L_∞ 误差比率	L_2 误差	L_2 误差比率
1.0	1/4 000	1.501 2	—	0.361 8	—
1/2	1/8 000	0.204 9	7.33	0.067 3	5.38
1/4	1/16 000	0.044 6	4.59	0.016 0	4.20
1/8	1/80 000	0.010 8	4.12	0.004 0	4.04

从表 1 可以看出, 随着时空步长逐次减半, 误差的范数逐次减少到上一情形的大约 $1/4$, 表明有限体积一次元达到了 2 阶收敛率。接下来, 采用该方法再次求解此问题, 时空步长分别取 $h = 1/4, dt = 1/16 000$, 如图 2 所示, 为单波在区间 $-30 \leq x \leq 30, 0 \leq t \leq 10$ 上的轮廓图, 其中, 黑色实线表示解析解, 红色、绿色及蓝色的点虚线表示数值解; 图 2(a) 表示解析解与数值解在三个不同时刻的结果对比, 图 2(b) 显示了激波在时空范围的传播, 总体上数值解与解析解非常吻合, 只是在激波的两个峰值附近产生了轻微的震荡。

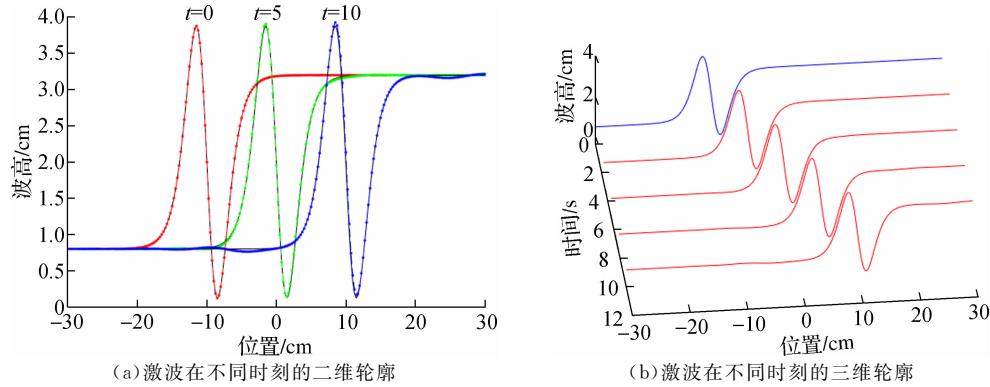


图 2 不同时刻时激波传播的数值解与解析解的结果比较

数值实验 2: 非震荡的行波解。

考虑 K-S 方程, 系数取值为: $\mu = -1, \lambda = 1$ 。在此情形下, 方程具有精确解:

$$u(x, t) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (\tanh^3(k(x - ct - x_0)) - 3 \tanh(k - (x - ct - x_0)))$$

初值与边界条件为: $u(a, t) = g1(t), u(b, t) = g2(t); u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0)$ 。其中边界条件 $g1(t), g2(t)$ 与初始条件由精确解得到, 参数 $x_0 = -30, k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}, c = 5$ 。采用线性元对此问题进行近似模拟, 时空步长

分别取为 $h = 1/4, dt = 1/16 000$, 求解的空间与时间区域为 $-50 \leq x \leq 50, 0 \leq t \leq 8$ 。图 3 显示了激波在不同时刻的模拟结果, 其中蓝色实线表示解析解, 红色的点表示数值解。对比可知, 模拟结果与参考文献 [10] 中给出的结果一致。

数值实验3:混沌现象。

在空间 $[-30, 30]$ 内考虑K-S方程,参数值 $\mu=1, \lambda=1$ 。此时方程可用于描述一种混沌现象,初始状态取为一个Gauss型脉冲,表达式为: $u(x, 0)=e^{-x^2}$;带有齐次边界条件,即: $u(-30, t)=u(30, t)=0$ 。

这里,采用线性元对此问题进行近似模拟,时空步长分别取 $h=1/4, dt=1/16000$ 。图4给出了数值解在不同时刻的模拟结果,与文献[10]中的结果一致。

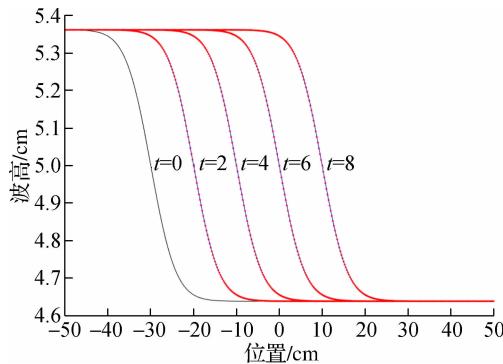


图3 不同时刻时波动的数值解与解析解的结果比较

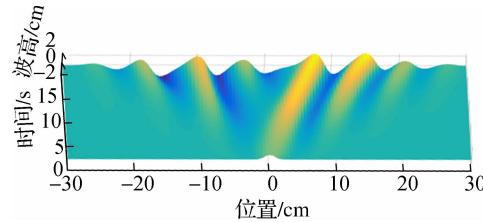


图4 $0 \leq t \leq 10$ s时混沌现象的数值模拟结果

3 结语

本文采用有限体积线性元方法求解了K-S方程的初边值问题,求解过程与有限元方法非常类似。通过实例来验证方法的有效性,并与相关文献的结果相比,证明本文所提出的方法计算过程更加简便,精确性也能满足模拟需要,且该数值格式易于推广到其它微分方程的近似求解。

参考文献:

- [1] Sivashinsky G I. On flame propagation under conditions of stoichiometry[J]. SIAM J. Appl. Math., 1980, 39(1): 67–82
- [2] 张俊,范馨月. Kuramoto-Sivashinsky 方程的数值方法[J]. 东北师范大学学报(自然科学版), 2015, 47(2): 45–52
- [3] Ganaie I A, Arora S, Kukreja V K. Cubic hermite collocation solution of Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 93(1): 1–13
- [4] Zavalani G. Fourier spectral methods for numerical solving of the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Global Journal of Researches in Engineering, 2014, 2(3): 90–97
- [5] Akrivis A D. Finite difference discretization of the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Numerische Mathematik, 1992, 63(1): 1–11
- [6] Singh B K, Arora G, Kumar P. A note on solving the fourth-order Kuramoto-Sivashinsky equation by the compact finite difference scheme[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2016(4): 190–201
- [7] 冯昭,王晓东,欧阳洁. 求解 Kuramoto-Sivashinsky 方程的平移基无单元 Galerkin 方法[J]. 物理学报, 2012, 61(23): 22–30
- [8] Doss L J T, Nandini A P. A fourth-order H^1 -Galerkin mixed finite element method for Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2018, 35(2): 445–477
- [9] Yan X, Wang S C. Local discontinuous galerkin methods for the Kuramoto-Sivashinsky equations and the Ito-type coupled KdV equations[J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 2006, 195: 3430–3447
- [10] Uddin M, Haq S, Islam S U. A mesh-free numerical method for solution of the family of Kuramoto-Sivashinsky equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 212(2): 458–469
- [11] Otomo R, Hiroshi B, Boghosian M, et al. Efficient lattice boltzmann models for the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Computers & Fluids, 2018, 172: 683–688

(责任编辑:谭彩霞)