第 35 卷 第 4 期 金陵科技学院学报 Vol. 35, No. 4
2019 年 12 月 JOURNAL OF JINLING INSTITUTE OF TECHNOLOGY Dec., 2019

DOI:10.16515/j.cnki.32-1722/n.2019.04.013

弱 Doi-Hopf 模范畴的诱导函子

王忠伟

(金陵科技学院理学院,江苏 南京 211169)

摘 要:设 H 是弱 Hopf 代数,A/B 是 H -扩张,从弱 Doi-Hopf 模范畴$\mathcal{M}_A^H$到右 B -模范畴$\mathcal{M}_B$的余诱导函子$(-)^{coH}$存在左伴随。证明了若 H 具有双射对积 S,且存在 H 上的 Haar 积分 λ,则$(-)^{coH}$也具有右伴随,称之为诱导函子。作为应用,在 A 是有限生成右 B -模条件下,构造了联系右 B -模范畴$\mathcal{M}_B$和弱 Doi-Hopf 模范畴$\mathcal{M}_A^H$的谱序列。

关键词:弱 Doi-Hopf;模范畴;诱导函子

中图分类号:O151 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-755X(2019)04-0057-04

Induction Functor for Weak Doi-Hopf Module Category

WANG Zhong-wei

(Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: Assume that H is a weak Hopf algebra with a bijective antipode S and a Haar integral λ on H, and let A/B be an H-extension. We construct a right adjoint, called the induction functor, for the coinduction functor $(-)^{\mathrm{coH}}$. As a corollary, we discuss a spectral sequence connecting right B-module category $\mathcal{M}_B$ and weak Doi-Hopf module category $\mathcal{M}_A^H$ when A is finite generated as a right B-module.

Key words: weak Doi-Hopf; modular category; coinduction functor

弱双代数和弱 Hopf 代数[1]通过弱化单位的余乘法和余单位的乘法推广了双代数和 Hopf 代数,即余乘法满足余结合律但不要求保持单位元,而余单位保持单位元但不要求是乘法映射。弱 Hopf 代数为研究某些量子域理论的对称性提供了好的框架,群胚代数、面代数和广义 Kac 代数是弱 Hopf 代数的例子。

设 H 是弱 Hopf 代数,A/B 是 H -扩张。对 $M\in\mathcal{M}_A^H$,$N\in\mathcal{M}_B$,考虑如下函子:

$$-\otimes_B A:\mathcal{M}_B\to\mathcal{M}_A^H,\quad N\mapsto N\otimes_B A,$$
$$(-)^{coH}:\mathcal{M}_A^H\to\mathcal{M}_B,\quad M\mapsto M^{coH}$$

众所周知,余诱导函子$(-)^{coH}$存在左伴随$-\otimes_B A$。本文中,在 H 具有双射对积 S,存在 H 上的 Haar 积分 λ,且 A/B 是 H -扩张的条件下,我们证明了$(-)^{coH}$具有右伴随,称之为诱导函子。作为应用,在 A 是有限生成的右 B -模的条件下,我们构造了联系右 B -模范畴$\mathcal{M}_B$和弱 Doi-Hopf 模范畴$\mathcal{M}_A^H$的谱序列。

除特别说明外,本文中所有的线性空间、张量积和同态均定义在域 k 上。对余代数和余模,我们采用 Sweedler 记法。对余代数 C,记余乘法 $\Delta(c)=\sum c_1\otimes c_2$,$\forall c\in C$;对右 C -余模 M,记余模结构映射 $\rho(c)=\sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}$,$\forall m\in M$。对于未经解释的定义和记法,可参考文献[2-3]。

收稿日期:2019-09-30

基金项目:国家自然科学基金(11601203);中国博士后基金(2018M642128);2019 年度江苏省高校"青蓝工程"项目

作者简介:王忠伟(1984—),男,山东日照人,副教授,博士,主要从事 Hopf 代数等方面的研究。

1 预备知识

定义 1.1 设 H 既是代数又是余代数，如果 H 满足下面的条件式(1) ~ (3)，则称 H 为弱双代数[1]。对任意 $x,y,z\in H$，

$$\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y) \tag{1}$$

$$\varepsilon(xyz)=\sum\varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z)=\sum\varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z) \tag{2}$$

$$\Delta^2(1_H)=(\Delta(1_H)\otimes 1_H)(1_H\otimes\Delta(1_H))=(1_H\otimes\Delta(1_H))(\Delta(1_H)\otimes 1_H) \tag{3}$$

其中 $\Delta(1_H)=\sum 1_1\otimes 1_2$，$\Delta^2=(\Delta\otimes id_H)\circ\Delta$。

进一步的，如果存在 k -线性映射 $S:H\rightarrow H$ 使得

$$\sum x_1S(x_2)=\sum\varepsilon(1_1x)1_2,\quad \sum S(x_1)x_2=\sum 1_1\varepsilon(x1_2),\quad \sum S(x_1)x_2S(x_3)=S(x) \tag{4}$$

则称弱双代数 H 为弱 Hopf 代数，并称 S 为 H 的对极。

对任意弱双代数 H，定义投射 $\varepsilon_t,\varepsilon_s:H\rightarrow H$ 如下。对任意 $h\in H$，

$$\varepsilon_t(h)=\sum\varepsilon(1_1h)1_2,\quad \varepsilon_s(h)=\sum 1_1\varepsilon(h1_2)$$

用 H_t 表示映射 ε_t 的象集，H_s 表示映射 ε_s 的象集。

定义 1.2 设 H 是弱 Hopf 代数。元素 $\lambda\in H^*$ 称为 H 上的左积分，如果对任意 $h\in H$，

$$\sum h_1\lambda(h_2)=\sum\lambda(1_2h)S(1_1) \tag{5}$$

进一步的，若 $\lambda\cdot\varepsilon_t=\varepsilon$，则称 λ 是正则的。类似的，可以定义 H 上的右积分。正则的双边积分称为 Haar 积分。

设 H 是弱 Hopf 代数，λ 是 H 上的 Haar 积分。由文献[4]知：

$$\sum h_1\lambda(gh_2)=\sum\lambda(g_2h)S(g_1),\sum\lambda(h_1g)h_2=\sum\lambda(hg_1)S(g_2) \tag{6}$$

定义 1.3 设 H 是弱双代数，代数 A 是右 H -余模。如果对任意 $a,b\in A$，

$$\rho(ab)=\rho(a)\rho(b),\rho(1_A)(a\otimes 1_H)=(id_A\otimes\varepsilon_t)\rho(a) \tag{7}$$

则称 A 为弱右 H -余模代数[5]。

设 H 是弱双代数，A 为弱右 H -余模代数。定义 A 的 H -余不变子代数

$$B\triangleq A^{coH}=\{b\in A\mid\sum b_{(0)}\otimes b_{(1)}=\sum b1_{(0)}\otimes 1_{(1)}\}=\{b\in A\mid\sum b_{(0)}\otimes b_{(1)}=\sum 1_{(0)}b\otimes 1_{(1)}\}$$

称 A/B 为 H -扩张。

定义 1.4 设 H 是弱双代数，A 是弱右 H -余模代数。若线性空间 M 既是右 A -模又是右 H -余模，并且对任意 $a\in A,m\in M$，满足如下相容条件：

$$\rho(m\cdot a)=\sum m_{(0)}\cdot a_{(0)}\otimes m_{(1)}a_{(1)} \tag{8}$$

则称 M 为弱右 Doi-Hopf 模。

以下，总假设 H 是具有双射对积 S 的弱 Hopf 代数，λ 是 H 上的 Haar 积分，A/B 是 H -扩张，并且记弱右 Doi-Hopf 模范畴为 $\mathcal{M}_A^H$。对 $M,N\in\mathcal{M}_A^H$，记

$$M^{coH}=\left\{m\in M\mid\sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}=\sum m\cdot 1_{(0)}\otimes 1_{(1)}\right\}$$

为 M 的 H -余不变子空间，$Hom_A^H(M,N)$ 为由从 M 到 N 的右 A -模、右 H -余模映射构成的集合。

2 诱导函子

设 $N\in\mathcal{M}_B$，则 $Hom_B(A,N)\in\mathcal{M}_A$，其右 A-模结构定义为 $(f\cdot a)(b)=f(ab)$。对任意 $f\in Hom_B(A,N)$，定义 $\rho(f)\triangleq\sum f_{(0)}\otimes f_{(1)}:A\rightarrow N\otimes H$ 为

$$\rho(f)(a)=\sum f(a_{(0)})\otimes S(a_{(1)}),\forall a\in A \tag{9}$$

易知 $\rho(f) \in Hom_B(A, N \otimes H)$

进而，若在映射 $\delta: Hom_B(A,N) \otimes H \to Hom_B(A, N \otimes H)$，$\delta(f \otimes h)(a) = f(a) \otimes h$ 的作用下，有 $\rho(f) \in Hom_B(A \cdot N) \otimes H$，则称 f 是有理的。记

$$HOM_B(A,N) = \{f \in Hom_B(A,N) \mid \rho(f) \in Hom_B(A,N) \otimes H\}$$

命题 2.1　在上述定义下，$(HOM_B(A,N), \rho) \in \mathcal{M}_A^H$。若 A 是有限生成的右 B-模，则 $HOM_B(A,N) = Hom_B(A,N)$。

证明：类似文献[6]中引理 2.1 可证，$HOM_B(A,N)$ 是合理定义的右 A-余模。对任意 $a, b \in A$ 和 $f \in HOM_B(A,N)$，

$$\begin{aligned}\rho(f \cdot a)(b) &= \sum (f \cdot a)(b_{(0)}) \otimes S(b_{(1)}) = \sum f(ab_{(0)}) \otimes S(b_{(1)}) \\ &= \sum f(a_{(0)}b_{(0)}) \otimes S(S^{-1}\varepsilon_s(a_{(1)})b_{(1)})\varepsilon_s(a_{(2)}) = \sum f(a_{(0)}b_{(0)}) \otimes S(a_{(1)}b_{(1)})a_{(2)} \\ &= \sum f_{(0)}(a_{(0)}b) \otimes f_{(1)}a_{(1)} = \sum (f_{(0)} \cdot a_{(0)})(b) \otimes\otimes f_{(1)}a_{(1)}\end{aligned}$$

其中上面第 3 个等式是由公式 $\sum a_{(0)} \otimes \varepsilon_s(a_{(1)}) = \sum a1_{(0)} \otimes 1_{(1)}$[7] 和公式(7)得到的。从而 $\rho(f \cdot a) = \sum f_{(0)} \cdot a_{(0)} \otimes\otimes f_{(1)}a_{(1)}$。故 $HOM_B(A \cdot N) \in \mathcal{M}_A^H$。

令 A 是有限生成的右 B-模，则单射 δ 是双射。事实上，假设存在 $a_i \in A(i = 1, \cdots, s)$ 使得 $A = \sum_{i=1}^{s} a_i B$。对任意 $g \in Hom_B(A, N \otimes H)$，则存在 H 的有限维子空间 V 使得 $g(a_i) \in N \otimes V \subseteq N \otimes H(i = 1, \cdots, s)$。故 $g(A) \subseteq N \otimes V$，即 $g \in Hom_B(A, N \otimes V)$。设 $v_1, \cdots, v_t$ 是 V 的一组基，则 $N \otimes V$ 的任一元素都可以唯一地表示成 $\sum_{i=1}^{t} n_i \otimes v_i$ 的形式。定义 $\pi_j\left(\sum_{i=1}^{t} n_i \otimes v_i\right) = n_j (1 \leqslant j \leqslant t)$。则易证 $\pi_j (1 \leqslant j \leqslant t)$ 是右 B-模映射，并且对任意 $z \in N \otimes V$，有 $z = \sum_{i=1}^{t} \pi_j(z) \otimes v_i$。特别的，$g(a) = \sum_{i=1}^{t} \pi_j g(a) \otimes v_i (a \in A)$。由 $\pi_j \circ g \in Hom_B(A, N \otimes H)(1 \leqslant j \leqslant t)$，得 $g = \delta\left(\sum_{i=1}^{t} \pi_j \circ g \otimes v_i\right)$，故 δ 是满射。

从而对任意 $f \in Hom_B(A,N)$，有 $\rho(f) \in Hom_B(A,N) \otimes H$。故 $Hom_B(A,N) \subseteq HOM_B(A,N)$。

证毕。

由上，可以定义诱导函子为

$$Coind \triangleq HOM_B(A, -)\ \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A^H$$

引理 2.1　1) 对任意 $M \in \mathcal{M}_A^H$，$P_M: M \to M^{coH}$，$P_M(m) = \sum \lambda(m_{(1)})m_{(0)}$ 是右 B-模幂等满同态。

2) 对任意 $N \in \mathcal{M}_B$，$\theta_N: Coind\ (N)^{coH} \to N$，$\theta(f) = f(1_A)$ 是右 B-模同构映射。

证明：1) 由文献[8]知 $\mathrm{Im}(P_M) \subseteq M^{coH}$。再由 λ 是 Haar 积分，易证 P_M 是右 B-模满同态，且 $P_M \circ P_M = P_M$。

2) θ_N 是单同态：假设 $f(1_A) = 0$ 且 $\rho(f) = \sum f \cdot 1_{(0)} \otimes 1_{(1)}$，则对任意 $a \in A$，有 $\sum f(1_{(0)}a) \otimes 1_{(1)} = \sum f(a_{(0)}) \otimes S(a_{(1)})$。等式两边作用映射 $id_N \otimes \lambda$，由(1)得

$$f(a) = f(P_A(a)) = f(1_A) \cdot P_A(a) = 0$$

θ_N 是满同态：对 $n \in N$，定义 $f_n: A \to N$，$f_n(a) = n \cdot P_A(a)$，$\forall a \in A$。则 f_n 即为 n 的原象。事实上，f_n 显然是右 B-线性的，且

$$\begin{aligned}\sum f_n(a_{(0)}) \otimes S(a_{(1)}) &= \sum n \cdot a_{(0)} \otimes \lambda(a_{(1)})S(a_{(2)}) = \sum n \cdot 1_{(0)}a_{(0)} \otimes \lambda(1_{(1)}a_{(1)})S(a_{(2)}) \\ &\overset{(6)}{=} \sum n \cdot 1_{(0)}a_{(0)} \otimes \lambda(1_{(1)}a_{(1)})1_{(2)} = \sum f_n(1_{(0)}a) \otimes 1_{(1)}\end{aligned}$$

于是 $\rho(f_n) = \sum f_n \cdot 1_{(0)} \otimes 1_{(1)}$，即 $f_n \in Coind\ (N)^{coH}$

证毕。

定理 2.1 $((-)^{coH}, Coind)$ 是伴随对,且$(-)^{coH} \circ Coind = 1_{\mathcal{M}_B}$

证明:设 $M \in \mathcal{M}_A^H, N \in \mathcal{M}_B$。对任意 $a \in A, m \in M, f \in Hom_B(M^{coH}, N)$,定义

$$\alpha: Hom_B(M^{coH}, N) \to Hom_A^H(M, Coind(N)), \alpha(f)(m)(a) = f(P_M(m \cdot a))$$

显然 $\alpha(f)(m)$ 是右 B-线性,而 $\alpha(f)$ 是右 A-线性的。要证 $\alpha(f)$ 是右 H-余线性的,且 $\alpha(f)(m) \in Coind(N) \subseteq Hom_B(A, N)$,只需证明 $\rho \circ \alpha(f) = \delta \circ (\alpha(f) \otimes id_H) \circ \rho_M$

事实上,

$$\begin{aligned}\rho(\alpha(f)(m))(a) &= \sum \alpha(f)(m)(a_{(0)}) \otimes S(a_{(1)}) = \sum \lambda(m_{(1)}a_{(1)})f(m_{(0)} \cdot a_{(0)}) \otimes S(a_{(2)}) \\ &= \sum \lambda(m_{(1)}a_{(1)})f(m_{(0)} \cdot a_{(0)}) \otimes m_{(2)} = \sum \alpha(f)(m_{(0)})(a) \otimes m_{(1)} \\ &= \sum (\alpha(f) \otimes id_H)(m_{(0)} \otimes m_{(1)})(a)\end{aligned}$$

对任意 $g \in Hom_A^H(M, Coind(N)), m \in M^{coH}$,有如下合理定义的映射:

$$\beta: Hom_A^H(M, Coind(N)) \to Hom_B(M^{coH}, N), \quad \beta(g)(m)g(m)(1_A)$$

是 α 的逆映射。因此,进而可得 $Coind$ 是$(-)^{coH}$ 的右伴随。

一方面,对任意 $a \in A, m \in M, g \in Hom_A^H(M, Coind(N))$,

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(g)(m)(a) &= \sum \lambda(m_{(1)}a_{(1)})\beta(g)(m_{(0)} \cdot a_{(0)}) = \sum \lambda(m_{(1)}a_{(1)})g(m_{(0)} \cdot a_{(0)})(1_A) \\ &= \sum \lambda(m_{(1)}a_{(1)})(g(m_{(0)}) \cdot a_{(0)})(1_A) = \sum \lambda(g\ (m)_{(1)}a_{(1)})g\ (m)_{(0)}(a_{(0)}) \\ &= \sum \lambda(S(a_{(1)})a_{(2)})g(m)(a_{(0)}) = g(m)(a)\end{aligned}$$

另一方面,对任意 $m \in M^{coH}, f \in Hom_B(M^{coH}, N)$,

$$\begin{aligned}\beta \circ \alpha(f)(m) &= \alpha(f)(m)(1_A) = \sum \lambda(m_{(1)}1_{(1)})f(m_{(0)} \cdot 1_{(0)}) \\ &= \sum \lambda(\varepsilon_t(m_{(1)}))f(m_{(0)}) = f(m)\end{aligned}$$

最后,由引理 2.1 可得$(-)^{coH} \circ Coind = 1_{\mathcal{M}_B}$

证毕。

推论 2.1 设 A 是有限生成的右 B-模,$M \in \mathcal{M}_A^H, N \in \mathcal{M}_B$,则有谱序列

$$Ext_A^{Hp}(M, Ext_B^q(A, N)) \Rightarrow Ext_B^{p+q}(M^{coH}, N), \quad \forall p, q \geqslant 0$$

证明:因为 A 是有限生成的右 B-模,所以由命题 2.1 知,$HOM_B(A, N) = Hom_B(A, N)$。于是由定理 2.3 和复合函子的 *Grothendick* 谱序列可得命题成立。

证毕。

参考文献:

[1] Böhm G,Nill F,Szlachányi K. Weak Hopf algebras(I):Integral theory and C*-structure[J]. J. Algebra,1999,221:385-438

[2] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings[J]. CBMS AMS,1993,82:163-169

[3] Sweedler M E. Hopf algebras[M]. New York:Benjamin,1969

[4] Nikshych D. On the structure of weak Hopf algebras[J]. Adv. Math.,2002,170:257-286

[5] Caenepeel S,Groot E De. Galois theory for weak Hopf algebras[J]. Rev. Roumaine Math. Pures Appl.,2007,52:151-176

[6] Zhou B R,Caenepeel S,Raianu S. The coinduced functor for infinite dimensional Hopf algebras[J]. J. Pure Appl. Algebra,1996,107:141-151

[7] Wang Z W,Chen Y Y,Zhang L Y. Total integrals for weak Doi-Koppinen data[J]. Algebr. Represent. Theor.,2013,16:931-953

[8] Wang Z W,Chen Y Y,Zhang L Y. Extensions of the endomorphism algebra of weak comodule algebras[J]. Math. Notes,2014,96:342-352

(责任编辑:湛 江)