

非中心 Wishart 矩阵分块阵的分布

杨 琳

(金陵科技学院理学院, 江苏 南京 211169)

摘 要: 在 Fisher 提出的中心 Wishart 分布的基础上进一步讨论非中心 Wishart 的背景、定义, 并且利用密度函数分解的方法证明了某种分块形式下非中心 Wishart 矩阵分块阵所服从的分布。

关键词: 中心 Wishart 分布; 非中心 Wishart 分布; 超几何函数; 矩阵

中图分类号: O212

文献标识码: A

文章编号: 1672-755X(2018)02-0054-03

Distribution of Non-central Wishart Matrix Block Matrix

YANG Lin

(Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: Based on the central Wishart distribution proposed by Fisher, the background and definition of non-central Wishart are further discussed. In addition, the distribution of non-central Wishart matrix block matrix is proved by means of density function decomposition.

Key words: central Wishart distribution; non-central Wishart distribution; hypergeometric function; matrix

多元正态分布族, 对于多元统计分析而言, 无论在理论还是应用领域, 一直为统计学研究的中心。历时数百年, 经过众多学者的不断努力, 至今已得到多方面的重要进展。它是多元统计分析理论中最为成熟的重要分支, 而 Wishart 分布是 Wishart 在研究一类与多元正态分布族关系密切的统计量时发现的重要分布, 在计量经济、工业、生物等领域都有广泛的应用^[1-4]。Wishart 分布密度的推导是多元分析发展史上的一个重要突破点。Fisher(1915)首先求出了二维 Wishart 分布的密度函数; Wishart 于 1928 年定义了实对称非负定矩阵上一种分布, 得到了多维 Wishart 分布的密度函数, 现称为 Wishart 分布, 随后出现了各种各样的推导方法。

Wishart 分布在多元分析中有很重要的地位。正如中心分布推广为中心 Wishart 一样, 非中心 Wishart 分布是非中心 χ^2 分布的推广。本文根据非中心 Wishart 分布的定义讨论其是否和中心 Wishart 分布有类似的性质, 比如分块阵分布的特点。

1 非中心 Wishart 分布的定义

定义 1^[5] 若 $A=Z'Z$, 其中矩阵 $Z \sim N_{n \times m}(M, I_n \otimes \Sigma)$, 则称 A 服从自由度为 n 、协方差为 $\Sigma > 0$ 、非中心参数为 $\Omega = \Sigma^{-1}M'M$ 的非中心 Wishart 分布, 记为 $A \sim W_m(n, \Sigma, \Omega)$ 。

引理 1^[5] 设 $A \sim W_m(n, \Sigma, \Omega)$, $n \geq m$, 则 A 的密度为

$$\frac{|A|^{\frac{n-m-1}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) |\Sigma^{\frac{n}{2}}|} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}A\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\Omega\right) {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\Omega\Sigma^{-1}A\right), A > 0 \quad (1)$$

收稿日期: 2018-06-13

作者简介: 杨琳(1978—), 女, 江苏宝应人, 讲师, 硕士, 主要从事概率统计等研究。

定义 2^[5] 矩阵变量超几何函数定义为

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_t \frac{(a_1)_t \cdots (a_p)_t}{(b_1)_t \cdots (b_q)_t} \frac{C_t(\mathbf{X})}{k!} \quad (2)$$

其中 $\sum_t$ 表示关于 k 的所有划分 $t=(k_1, \dots, k_m)$ 求和, 这里 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$, $\sum k_i = k$, $C_t(\mathbf{X})$ 是 $m \times m$ 对称矩阵 $\mathbf{X}$ 的相对于划分 t 的带状多项式, 而广义超几何系数 $(a)_t$ 为

$$(a)_t = \prod_{i=1}^m \left(a - \frac{1}{2}(i-1) \right)_{k_i}$$

其中 $(a)_{k_i} = a(a+1) \cdots (a+k_i-1)$, $(a)_0 = 1$ 。

引理 2^[5] 设 $\mathbf{X}$ 是一个 $n \times m$ 实矩阵, $m \leq n$, $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) \in O(n)$, 这里 $\mathbf{H}_1$ 是 $n \times m$ 矩阵, 则

$$\int_{O(n)} \text{etr}(\mathbf{X}'\mathbf{H}_1) (d\mathbf{H}) = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}n; \frac{1}{4}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)$$

其中 $(d\mathbf{H})$ 表示 $O(n)$ 上的标准不变测度。

2 非中心 Wishart 矩阵分块阵的分布

定理 1 设 $n \times m$ 矩阵 $\mathbf{Z} \sim N_{n \times m}(\mathbf{M}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$, 这里 $n > m$, 于是 $\mathbf{A} = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} \sim W_m(n, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Omega})$, 其中 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}$,

将 $\mathbf{A}$ 作分割, 类似地 $\boldsymbol{\Sigma}$ 可分割成 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_{11}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}: m_1 \times m_1, \mathbf{A}_{22}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}: m_2 \times m_2, m = m_1 + m_2$, 再

对 $\mathbf{M}$ 作分割 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2)$, 其中 $\mathbf{M}_1: n \times m_1, \mathbf{M}_2: n \times m_2$ 。当 $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = 0, \mathbf{M}_1 = 0$ 时, 有如下结论:

$$\mathbf{A}_{11.2} \sim W_{m_1}(n - m_2, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$

$$\mathbf{A}_{12} | \mathbf{A}_{22} \sim N_{m_1 \times m_2}(0, \boldsymbol{\Sigma}_{11} \otimes \mathbf{A}_{22})$$

$$\mathbf{A}_{22} \sim W_{m_2}(n, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \boldsymbol{\Omega}^*)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2'\mathbf{M}_2$ 。

证明: 因为 $\mathbf{Z} \sim N_{n \times m}(\mathbf{M}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$, 则 $\mathbf{A} \sim W_m(n, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Omega})$, 从而 $\mathbf{A}$ 的密度函数为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \frac{|\mathbf{A}|^{\frac{n-m-1}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}\right) {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right) \\ &= \frac{|\mathbf{A}_{11.2}|^{\frac{n-m-1}{2}} |\mathbf{A}_{22}|^{\frac{n-m-1}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}\right) {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right) \end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = 0, \mathbf{M}_1 = 0$ 时, 上式可化简为:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= \frac{|\mathbf{A}_{11.2}|^{\frac{n-m-1}{2}} |\mathbf{A}_{22}|^{\frac{n-m-1}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{\frac{n}{2}}} \cdot \\ &\quad \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{11}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{22}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2'\mathbf{M}_2\right) \cdot \\ &\quad {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2'\mathbf{M}_2\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{22}\right) \\ &= \frac{|\mathbf{A}_{11.2}|^{\frac{n-m-1}{2}} |\mathbf{A}_{22}|^{\frac{n-m-1}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{\frac{n}{2}}} \cdot \\ &\quad \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{11.2}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{22}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2'\mathbf{M}_2\right) \cdot \\ &\quad {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2'\mathbf{M}_2\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{22}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\mathbf{A}_{11,2}|^{\frac{n-m_2-m_1-1}{2}}}{2^{\frac{m_1(n-m_2)}{2}} \Gamma_{m_1}\left(\frac{n-m_2}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{\frac{n-m_2}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{\frac{n-m_2}{2}}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{11,2}\right) \cdot \\
&\quad (2\pi)^{-\frac{m_1 m_2}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{-\frac{m_2}{2}} |\mathbf{A}_{22}|^{-\frac{m_1}{2}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}\right) \cdot \\
&\quad \frac{|\mathbf{A}_{22}|^{\frac{n-m_2-1}{2}}}{2^{\frac{m_2}{2}} \Gamma_{m_2}\left(\frac{n}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{\frac{n}{2}}} \cdot \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{22}\right) \cdot \\
&\quad \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{M}_2' \mathbf{M}_2\right) \cdot {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{4} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{M}_2' \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{22}\right) \quad (3)
\end{aligned}$$

以上证明用到事实:

$$\begin{aligned}
\Gamma_m\left(\frac{1}{2}n\right) &= \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^m \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-i+1)\right] \\
&= \pi^{m_1(m_1-1)/4} \prod_{i=1}^{m_1} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-m_2-i+1)\right] \times \pi^{m_2(m_2-1)/4} \prod_{i=1}^{m_2} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-i+1)\right] \pi^{m_1 m_2/2} \\
&= \Gamma_{m_1}\left(\frac{n-m_2}{2}\right) \Gamma_{m_2}\left(\frac{1}{2}n\right) \pi^{m_1 m_2/2}
\end{aligned}$$

由式(3)表示的密度因子分解形式可知,其中第一行是 $\mathbf{A}_{11,2}$ 的密度函数,第二行是给定 $\mathbf{A}_{22}$ 下 $\mathbf{A}_{12}$ 的条件密度函数,最后一行是 $\mathbf{A}_{22}$ 的密度函数。

从而根据式(3)分别有:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11,2} &\sim W_{m_1}(n-m_2, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \\
\mathbf{A}_{12} | \mathbf{A}_{22} &\sim N_{m_1 \times m_2}(0, \boldsymbol{\Sigma}_{11} \otimes \mathbf{A}_{22}), \\
\mathbf{A}_{22} &\sim W_{m_2}(n, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \boldsymbol{\Omega}^*)
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \mathbf{M}_2' \mathbf{M}_2$ 。

3 结 语

中心 Wishart 矩阵分块阵的分布,是一个非常有用的定理^[5],但在非中心 Wishart 分布的部分却没有提及。本文通过密度函数分解的方法证明了非中心 Wishart 分布在某种分块情况下所服从的方式。

参考文献:

- [1] 程慧燕,杜明银,赵艳伟.多元统计分析中两类重要的非中心分布[J].贵阳学院学报,2015(3):1-4
- [2] 张嘉峰,朱博,张鹏,等. Wishart 分布情形下极化 SAR 图像目标 CFAR 检测解析方法[J].电子学报,2018(2):433-439
- [3] 翟玮.基于单时相全极化 SAR 影像的建筑物震害信息提取[J].山西地震,2016(3):19-22
- [4] 李兰,陈尔学,李增元,等.极化 SARK-Wishart 分类器及其性能评价[J].武汉大学学报,2016(11):1498-1504
- [5] 刘金山. Wishart 分布引论[M].北京:科学出版社,2005:170-176

(责任编辑:湛 江)