第 35 卷 第 1 期　　金 陵 科 技 学 院 学 报　　Vol. 35, No. 1
2019 年 3 月　　JOURNAL OF JINLING INSTITUTE OF TECHNOLOGY　　Mar., 2019

DOI:10.16515/j.cnki.32-1722/n.2019.01.003

基于离散指示矩阵优化的多视图子空间聚类算法

卢志强[1,2],莫晓晖[1*],吴松松[2]

(1.金陵科技学院计算机工程学院,江苏　南京　211169;2.南京邮电大学自动化学院,江苏　南京　210023)

摘　要:多视图子空间聚类旨在把一组多源数据按照其底层结构分到对应的子空间。现有的方法局限于只探究多视图之间的公共信息,或者只探究多视图之间的互补信息,容易造成聚类的关键信息缺失。提出一种基于离散指示矩阵优化的多视图子空间聚类的方法,用离散指示矩阵优化用于多视图聚类的邻接矩阵。算法考虑了多视图之间的互补信息,保证在不同视图下聚类的一致性。实验结果表明,提出的算法获得的邻接矩阵块状结构更明显,聚类的准确度更高。

关键词:公共信息;互补信息;离散指示矩阵;邻接矩阵

中图分类号:TP311　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-755X(2019)01-0011-05

Multi-view Subspace Clustering Algorithm Based on Discrete Indicator Matrix Optimization

LU Zhi-qiang[1,2], MO Xiao-hui[1*], WU Song-song[2]

(1. Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China;
2. Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: Multi-view subspace clustering aims to divide a set of multi-source data into corresponding subspaces according to its underlying subspace structure. Many existing methods either explore multi-view common information or only explore complementary information in different views, which are easy to cause the lack of the key information in clustering. A multi-view subspace clustering method based on discrete indicator matrix optimization is employed to optimize the affinity matrix for multi-view clustering. At the same time, the algorithm takes into account the complementary information and common information between different views to ensure the consistency of clustering in different views. The experimental results show that the block structure of affinity matrix obtained by the proposed algorithm is more obvious and the clustering accuracy is higher.

Key words: common information; complementary information; discrete indicator matrix; affinity matrix

随着互联网技术和计算机技术的迅猛发展,高维数据的涌现给数据的分类处理带来了越来越多的挑战。高维数据往往具有特征分组的特性,这些特征组称为视图。而作为数据预处理的核心技术之一的聚

收稿日期:2019-02-21
基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(KZ0051314056)
作者简介:卢志强(1994—),男,河南郑州人,硕士研究生,主要从事多视图聚类研究。
通信作者:莫晓晖(1972—),男,浙江丽水人,教授,博士,主要从事数字图像处理、模式识别等研究。

类，在面对大量图像、文本和视频等数据时显得越来越重要。

聚类是指对未标记训练的样本，根据数据的内在相似性，将数据分为若干个不相交的类别。在计算机视觉和模式识别领域[1-2]，最初稀疏子空间聚类是主流[3]，后来多视图聚类越来越受到研究者的关注。多视图聚类利用一组数据多种特征完成聚类任务，例如利用一组图像的灰度、局部纹理等特征。在多视图聚类问题中，需要考虑不同视图之间的互补信息和确保在不同视图下聚类的一致性，否则将严重影响聚类结果的正确率。对此，国内已提出不少解决方法，文献[4]采用希尔伯特迭代去探究在多视图下子空间表示的多样性来考虑不同视图之间的互补信息，文献[5]利用一个正则化约束保证不同视图下聚类的一致性。

本文提出一种基于离散指示矩阵优化的多视图子空间聚类的方法，通过子空间学习学得数据的子空间表示，采用排它性表示约束来考虑不同视图之间的互补信息，然后利用子空间表示构造邻接矩阵，最后利用谱聚类算法得到聚类标签，把聚类标签与真实的数据标签做对比，得到评价聚类的指标。

1 理论基础

在多视图子空间聚类问题中，关键是得到数据在每个视图下的子空间表示。假设给定一组数据 $D=\{X_1,X_2,\cdots,X_V\}$，$X_V\in R^{d_v\times n}$，$v\in\{1,2,\cdots,V\}$，d_v 代表在第 v 个视图下数据的维度，n 代表数据总量。此时多视图数据的子空间表示 $\boldsymbol{Z}_v$ 可以由如下式子得到：

$$\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Z}_v+\boldsymbol{E}_v \quad \text{s.t} \quad Z_{v(i,i)}=0 \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{Z}_v\in R^{n\times n}$ 是每个视图下的子空间表示，$E_v\in R^{d_v\times n}$ 代表每个视图下可能存在的误差。然后利用子空间表示构造邻接矩阵 $\boldsymbol{W}_v$：

$$\boldsymbol{W}_v=\frac{|\boldsymbol{Z}_v|+|\boldsymbol{Z}_v|^{\mathrm{T}}}{2} \tag{2}$$

最后把邻接矩阵作为谱聚类[6]的输入得到聚类标签。

1.1 排它性约束

定义排它性约束如下：对于矩阵 $\boldsymbol{U}\in R^{n\times n}$ 和矩阵 $\boldsymbol{V}\in R^{n\times n}$，$K(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})=\|\boldsymbol{U}\odot\boldsymbol{V}\|_0=\sum_{ij}u_{ij}v_{ij}\neq 0$，$\odot$ 代表哈达玛乘积，$\|\cdot\|_0$ 代表0范数。这时可以采用以上定义对多视图数据的子空间表示进行约束，所以有：

$$K(\boldsymbol{Z}_v,\boldsymbol{Z}_w)=\|\boldsymbol{Z}_v\odot\boldsymbol{Z}_w\|_0 \ (v\neq w) \tag{3}$$

由于0范数是一个“NP-Hard”，所以把0范数约束替换为1范数约束，有：

$$K(\boldsymbol{Z}_v,\boldsymbol{Z}_w)=\|\boldsymbol{Z}_v\odot\boldsymbol{Z}_w\|_1 \ (v\neq w) \tag{4}$$

通过探究不同视图之间的关系，得到视图之间的互补信息。

1.2 离散指示矩阵

为了保证在多视图聚类问题中不同视图下聚类的一致性，对在不同视图下得到的拉普拉斯矩阵进行约束，具体公式如下：

$$\min_{P} Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_v\boldsymbol{P}) \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=I \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{P}\in R^{n\times c}$，$n$ 代表数据个数，c 代表数据的类别数。$\boldsymbol{L}_v\in R^{n\times n}$ 是拉普拉斯矩阵，它可以由以下式子得到：$\boldsymbol{L}_v=\boldsymbol{D}_v-\boldsymbol{W}_v$。这里 $\boldsymbol{D}_v\in R^{n\times n}$ 是一个对角矩阵，除主对角外其他位置元素都为0，$d_{vii}=\sum_j W_{vij}$。由于式(5)是放松了谱聚类的约束得到最优化问题，可能会使求得的 $\boldsymbol{P}$ 偏离真实的离散指示矩阵，进而影响构造的邻接矩阵，使聚类结果出现偏差。为了解决这个问题，把离散指示矩阵加入模型中，对子空间表示进行优化。此时式(5)变为：

$$\min_{P,F} Tr(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_v\boldsymbol{F})+\|\boldsymbol{F}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2 \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=I \quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=I \quad \boldsymbol{F}\in I_{dx} \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{Q}\in R^{c\times c}$ 是一个变换矩阵，$\boldsymbol{F}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}\in R^{n\times c}$，$f_i\in\{0,1\}^{c\times 1}$，$\boldsymbol{F}$ 的每一行每一列只含有一个元素1，其它位置元素均为0。

2　本文算法

2.1　算法模型及求解

综上，基于离散指示矩阵优化的多视图聚类算法模型为：

$$\min_{\{\boldsymbol{Z}_v\}_1^V,\{\boldsymbol{E}_v\}_1^V,\boldsymbol{F},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}} \sum_{v=1}^{V} \|\boldsymbol{E}_v\|_1 + \lambda_1 \sum_{v=1}^{V} \|\boldsymbol{Z}_v\|_1 + \lambda_2 \sum_{v \neq w} \|\boldsymbol{Z}_v \odot \boldsymbol{Z}_w\|_1 + \lambda_3 \sum_{v=1}^{V} Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_v \boldsymbol{P}) + \lambda_4 \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2$$

$$\text{s.t} \quad \boldsymbol{X}_v = \boldsymbol{X}_v \boldsymbol{Z}_v + \boldsymbol{E}_v, \boldsymbol{Z}_{v(i,i)} = 0, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = I, \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = I, \boldsymbol{F} \in I_{dx} \tag{7}$$

式中，λ_1，λ_2，λ_3 和 λ_4 均为大于 0 的正则化参数。为了方法求解，省略变量的下标对目标函数进行求解，式(7)可以变成：

$$\min_{\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}} \|\boldsymbol{E}\|_1 + \lambda_1 \|\boldsymbol{Z}\|_1 + \lambda_2 \sum_{v \neq w} \|\boldsymbol{Z}_v \odot \boldsymbol{Z}_w\|_1 + \lambda_3 Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}) + \lambda_4 \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2$$

$$\text{s.t} \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{E}, \boldsymbol{Z}_{(i,i)} = 0, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = I, \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = I, \boldsymbol{F} \in I_{dx} \tag{8}$$

用 ADMM(Alternating Direction Method of Multipliers)对式(8)进行求解。由于 1 范数难以求解，引入分裂变量 $\boldsymbol{C}$，构造增广拉格朗日式：

$$L(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{C},\boldsymbol{E},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{F}) = \|\boldsymbol{E}\|_1 + \lambda_1 \|\boldsymbol{Z}\|_1 + \lambda_2 \sum_{v \neq w} \|\boldsymbol{Z}_v \odot \boldsymbol{Z}_w\|_1 + \lambda_3 Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}) + \lambda_4 \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2 +$$

$$\phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}) + \phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z})) \tag{9}$$

式中，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}_{(i,i)}$，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Z} - \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z})$，$\phi(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{M}) = \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{M}\|_F^2 + \langle \boldsymbol{C},\boldsymbol{M} \rangle$，$\langle \cdot , \cdot \rangle$表示两个矩阵的内积，$\mu$ 是一个正则化参数，$\boldsymbol{Y}_1$ 和 $\boldsymbol{Y}_2$ 是拉格朗日乘子，然后分别对 $\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的求解。

对于 $\boldsymbol{Z}$：

$$\min_{\boldsymbol{Z}} \lambda_1 \|\boldsymbol{Z}\|_1 + \lambda_2 \sum_{v \neq w} \|\boldsymbol{Z}_v \odot \boldsymbol{Z}_w\|_1 + \lambda_3 Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}) + \phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z})) \tag{10}$$

所以：

$$\boldsymbol{Z} = \bar{\boldsymbol{Z}} - \mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{Z}}), \qquad \bar{\boldsymbol{Z}} = S_{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{v \neq w} |\boldsymbol{Z}_w| + \lambda_3 |\theta|}{\mu}} \left[\boldsymbol{C} + \frac{\boldsymbol{Y}_2}{\mu} \right] \tag{11}$$

式中，$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\|p^i - p^j\|_2^2$，$S_\tau[\cdot]$代表收缩阈值。

对于 $\boldsymbol{C}$：

$$\min_{\boldsymbol{C}} \phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}) + \phi(\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z})) \tag{12}$$

所以：

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + I)^{-1} \left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{Y}_1}{\mu} \right) + \boldsymbol{Z} - \mathrm{diag}(\boldsymbol{Z}) - \frac{\boldsymbol{Y}_2}{\mu} \right) \tag{13}$$

对于 $\boldsymbol{E}$：

$$\min_{\boldsymbol{E}} \|\boldsymbol{E}\|_1 + \phi(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}) \tag{14}$$

所以：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}_{\frac{1}{\mu}} \left[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} + \frac{\boldsymbol{Y}_1}{\mu} \right] \tag{15}$$

对于 $\boldsymbol{P}$：

$$\min_{\boldsymbol{P}} \lambda_3 Tr(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}) + \lambda_4 \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2 \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = I \tag{16}$$

求解关于 $\boldsymbol{P}$ 的正交约束问题根据文献[7]。

对于 $\boldsymbol{Q}$：

$$\min_{\boldsymbol{Q}} \lambda_4 \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\|_F^2 \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = I \tag{17}$$

所以：

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别是 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 奇异值分解的左部分和右部分。

对于 $\boldsymbol{F}$：

$$\min_{\boldsymbol{F}} \lambda_4 \| \boldsymbol{F}-\boldsymbol{PQ} \|_F^2 \quad \text{s.t} \quad \boldsymbol{F} \in I_{dx} \tag{19}$$

所以：

$$\boldsymbol{F}_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if} \quad j=\operatorname{argmax}_l(\boldsymbol{PQ})_{il} \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{20}$$

2.2 算法步骤

在完成了对每个变量的第一轮求解之后，需要通过迭代求出每个变量的最优解详见表1。变量的初始化对算法也有很重要的影响，选择随机输入但矩阵值不为0。变量的先后更新顺序对实验结果也有影响，算法先对子空间表示 $\boldsymbol{Z}$ 进行更新，再对分裂变量 $\boldsymbol{C}$ 进行更新，更新误差 $\boldsymbol{E}$，然后对两个拉格朗日乘子 $\boldsymbol{Y}_1$ 和 $\boldsymbol{Y}_2$，最后更新 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{F}$，迭代的终止条件为目标函数值变化小于0.05。

表1 算法具体流程

输入：一组没有标签的多视图数据 $D=\{X_1,X_2,\cdots,X_V\}$ 和子空间的数量 c，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3>0$，$\lambda_4>0$
初始化：随机输入 $\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2,\cdots,\boldsymbol{Z}_V,\boldsymbol{E},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{F}$
迭代：1.更新 $\boldsymbol{Z}$，根据式(11)
2.更新 $\boldsymbol{C}$，根据式(13)
3.更新 $\boldsymbol{E}$，根据式(15)
4.更新拉格朗日乘子：$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Y}_1+\mu(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{XC}-\boldsymbol{E})$，$\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{Y}_2+\mu(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{Z}+\operatorname{diag}(\boldsymbol{Z}))$
5.更新 $\boldsymbol{P}$，根据式(16)
6.更新 $\boldsymbol{Q}$，根据式(18)
7.更新 $\boldsymbol{F}$，根据式(20)
邻接矩阵：$\boldsymbol{W}=\sum_{v=1}^{V}\frac{\lvert \boldsymbol{Z}_v \rvert+\lvert \boldsymbol{Z}_v \rvert^{\mathrm{T}}}{2}$
输出：运用谱聚类算法[6]得到聚类结果。

3 实验及结果分析

3.1 数据集介绍及对比方法

对比实验选择在Yale-B、Yale和ORL(Olivetti Research Laboratory)3个数据库上进行。Yale-B数据库总共有2 414幅图像、38类，选择前10类的640幅图像进行实验作为第一个数据集；Yale数据库包含15类165图像；ORL数据库包含40类总共400幅图像。3个数据库都是3个视图，3个视图特征分别为Intensity、LBP(Local Binary Patterns)、Gabor，对比2个单视图方法和2个多视图方法。

SPC[6](Standard Spectral Clustering)：此方法选择信息最丰富的视图通过谱聚类算法得到聚类结果。SSC[8](Sparse Subspace Clustering)：此方法首先得到数据的稀疏表示，然后构造邻接矩阵作为谱聚类的输入得到聚类结果。RMSC[9](Robust Multi-view Spectral Clustering)：该方法为鲁棒性多视图谱聚类的方法，运用马尔可夫链聚类。DiMSC[4](Diversity-induced Multi-view Subspace Clustering)：此方法采用希尔伯特迭代探究多视图之间的互补信息，运用谱聚类算法得到聚类结果。

3.2 实验结果与分析

在3个图像数据上，调取每一个参数从区间[0.001,0.005,0.01,0.05,0.1,1]，寻找出每个参数的最优区间，然后在每个参数的最优区间下每个数据库上运行30次实验，得出实验结果的平均值和标准差。同时用聚类常用的2个评价指标判定算法聚类的性能，分别为Normalized Mutual Information (NMI)和Accuracy(ACC)。

由表2、表3和表4数据(表中数据为平均值±标准差)分析可得：相比于其它4个聚类方法，算法由于利用其它视图的信息，使得聚类的性能有较高的提升。在Yale-B数据集上，算法比传统的稀疏子空间聚类SSC在NMI和ACC两个指标上分别提升22.8%、20.6%，相比DiMSC方法，算法的聚类性能分别提升12.7%、18.8%，原因在于算法不仅保证了多视图聚类的一致性还对子空间表示进行了优化。在Yale数据集上，本文算法相较于SSC方法在NMI和ACC上分别提升8.3%、10.6%，比DiMSC方法提

升 2.7%、2.4%。另外在 ORL 数据集上，本文算法相较于 SSC 方法聚类性能提升 5.3%、7.5%，相较于 DiMSC 方法提升微小。从 3 个数据集的实验结果可以看出，多视图聚类方法普遍优于单视图聚类方法。

表 2　Yale-B 数据库的实验结果

评价指标	SPC	SSC	RMSC	DiMSC	本文算法
NMI	0.360±0.016	0.534±0.003	0.151±0.001	0.635±0.002	0.762±0.010
ACC	0.366±0.059	0.587±0.003	0.224±0.000	0.615±0.003	0.793±0.020

表 3　Yale 数据库的实验结果

评价指标	SPC	SSC	RMSC	DiMSC	本文算法
NMI	0.654±0.009	0.671±0.009	0.684±0.033	0.727±0.010	0.754±0.003
ACC	0.616±0.030	0.627±0.000	0.642±0.036	0.709±0.003	0.733±0.011

表 4　ORL 数据库的实验结果

评价指标	SPC	SSC	RMSC	DiMSC	本文算法
NMI	0.884±0.002	0.893±0.007	0.872±0.012	0.940±0.003	0.946±0.005
ACC	0.726±0.025	0.765±0.008	0.723±0.025	0.838±0.001	0.840±0.016

4　结　语

在现实生活中，聚类技术对数据的预处理显得越来越重要。一些传统的单视图聚类方法在面对多视图数据时会使聚类结果不准确。本文提出一种基于离散指示矩阵优化的多视图子空间聚类方法，既考虑了多视图数据之间的互补信息，保证了多视图数据聚类的一致性，又对用于聚类的邻接矩阵进行了迭代优化，使邻接矩阵能充分体现子空间结构，在 3 个图像数据库上的实验证明方法可行。

参考文献：

[1] Zhang C, Fu H, Hu Q. Flexible multi-view dimensionality co-reduction[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 26(2): 648－659

[2] Wang H, Nie F, Huang H. Multi-view clustering and feature learning via structured sparsity[C]. New York: International Conference on Machine Learning, 2013: 352－360

[3] 王卫卫，李小平，冯象初，等. 稀疏子空间聚类综述[J]. 自动化学报，2015，41(8)：1373－1384

[4] Cao X, Zhang C, Fu H, et al. Diversity-induced multi-view subspace clustering[C]. Berlin: Proc. IEEE Int. Conf. Mach. Learn., 2015: 586－594

[5] Gao H, Nie F, Li X. Multi-view subspace clustering[C]. New York: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision, 2015: 4238－4246

[6] Ng A, Jordan M, Weiss Y. On spectral clustering: Analysis and an algorithm[C]. London: Proceeding of Advances in neural information processing systems, 2002: 849－856

[7] Wen Z, Yin W. A feasible method for optimization with orthogonality constraints[J]. Mathematical Programming, 2013, 142(1/2): 397－434

[8] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering[C]. New Jersey: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2009: 2790－2797

[9] Xia R, Pan Y, Du L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition[C]. London: Proc. Assoc. Adv. Artif. Intell, 2014: 2149－2155

（责任编辑：湛　江）